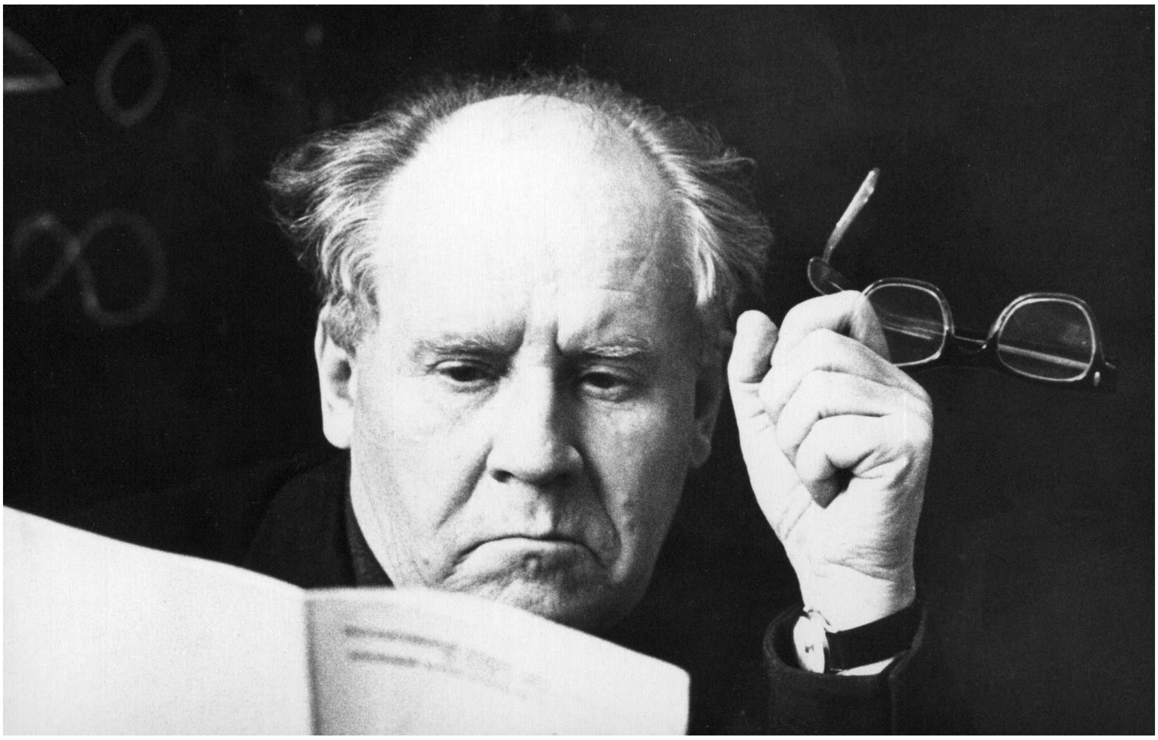
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2022)



Материалы конференции

Часть 1

Аналитическая теория дифференциальных уравнений
Асимптотическая теория дифференциальных уравнений
Качественная теория дифференциальных уравнений
Теория устойчивости и управления движением

НОВОПОЛОЦК 2022

УДК 517.9
ББК 22.161.6я43
Д22

Редакторы:
В. В. Амелькин, А. Б. Антоневич, А. И. Астровский,
М. М. Васьковский, А. Л. Гладков, В. И. Громак, А. К. Деменчук,
А. А. Козлов, С. А. Мазаник, Е. К. Макаров

Д22 **XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2022):** материалы Международной научной конференции. Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022 г.: в 2 ч. — Ч. 1. — Новополоцк: Полоцкий государственный университет, 2022. — 128 с.

ISBN 978-985-531-795-2 (Часть 1)
ISBN 978-985-531-794-5

Сборник содержит доклады, представленные на XX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2022) по вопросам аналитической, асимптотической и качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и управления движением.

ISBN 978-985-531-795-2 (Часть 1)
ISBN 978-985-531-794-5

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Т.К. Андреева, Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$(y'-y^2)y^2y''' =$$
$$= (1-1/\nu)y^2y''^2 + a_1yy'^2y'' + a_2y'^4 + a_3y^3y'y'' + a_4y^2y'^3 + a_5y^5y'' + a_6y^4y'^2, \qquad (1)$$

где y – комплекснозначная функция от z, z – независимая комплексная переменная, $\nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Уравнением (1) может быть определена одна из компонент квадратичной системы третьего порядка.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} y' = uy^2, \\ (u-1)u'' = (1-1/\nu)u'^2 - p(u)u'y - q(u)y^2, \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$p(u) = (2-a_1+4/\nu)u^2 - (a_3+6)u - a_5,$$
$$q(u) = (2-2a_1-a_2+4/\nu)u^4 - (2a_3+a_4+6)u^3 - (2a_5+a_6)u^2.$$

В случае $p(1)=q(1)=0$ Пенлеве-анализ уравнения (1) проводился в [1, 2]; при $\nu=\infty$, $p(1)\neq 0$ – в [3, 4].

Справедлива

Лемма 1. *Для наличия свойства Пенлеве у системы (2) необходимо выполнение условий*

$q(1) = \nu p^2(1)/(\nu-2)^2$, $(1-2/\nu)q'(1)+p(1)(1+p'(1)) = 0$ *при* $p(1)\neq 0$, $\nu \in \mathbb{N}\setminus\{2\}$;

$p(1)=0$, $2q(1)(1+p'(1))^2 = q'^2(1)$ *при* $\nu = 2$;

$q(1) = \nu p^2(1)/(\nu-2)^2$ *при* $\nu=-k$, $k\in\mathbb{N}$, *или*

$q(1) = 3/2p^2(1)$ *при* $\nu=-3$, *или* $q(1)=5p^2(1)$ *при* $\nu=-5$, *или*

$q(1) = 1/2p^2(1)$ *либо* $p(1)=0$ *при* $\nu=-2$.

Условия леммы 1 при $\nu\in\mathbb{N}$ содержатся в [5]. Решается задача нахождения необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у уравнения (1). Приведем результаты, полученные при выполнении условий леммы 1 и

$$2-2a_1-a_2+4/\nu \neq 0, \quad a_6=-2a_5.$$

Имеет место

Лемма 2. *Уравнение (1) при каждом наборе коэффициентов*

$$a_1=a_2=a_5=a_6=0,\ a_3=-3\nu/(\nu+1),\ a_4=\nu(2\nu+1)/(\nu+1)^2,\ \nu\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1,0\}; \quad (3)$$

$$a_1=a_2=0,\ a_3=-4,\ a_4=-a_5=-\nu,\ a_6=-2\nu,\ \nu\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}; \qquad (4)$$

$$\nu=-8,\ a_1=a_2=a_4=a_5=a_6=0,\ a_3=-2$$

удовлетворяет необходимым условиям наличия свойства Пенлеве.

Доказана

Теорема. *1) Уравнение (1) с коэффициентами (3) при* $\nu = -k,\ \ k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, *обладает свойством Пенлеве.*

2) Общее решение уравнения (1) с коэффициентами (3) при $\nu \in \mathbb{N}$ *и с коэффициентами (4) содержит подвижные логарифмические точки ветвления.*

Литература

1. Мартынов И. П. *Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 764–771.
2. Мартынов И. П. *Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 6. С. 937–946.
3. Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 9. С. 1640–1641.
4. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Аналитические свойства решений одного класса уравнений третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1219–1224.
5. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных многозначных особых точек* // Респ. науч.-практ. конф., посвящ. 450-летию со дня рождения Г. Галилея: материалы конф. Брест, 17–18 апреля 2014 г. Брест: БрГУ, 2014. С. 11–13.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОИЗВОДНЫЕ ВО ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Е.Р. Бабич, И.П. Мартынов

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} xy'^2 - 2x'^2 = xy^4 - 6x^2y^2 + 4x^3 + ax, \\ x'^2 y - 2xx'y' = 4x^3y - x^2y^3 + bx, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b – постоянные, причем резонансы этой системы равны $r_1 = -1,\ \ r_2 = -2$.

Подставляя ряды

$$x = \frac{1}{t^2} + \frac{\alpha}{t} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \qquad y = \frac{\pm 2}{t} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad t = z - z_0, \tag{2}$$

в уравнения системы (1), найдем

$$\alpha = a_0 = a_1 = a_4 = a_5 = b_0 = b_1 = b_2 = b_5 = b_6 = 0,$$

$$a_2 = -\frac{1}{20}a,\ a_3 = \mp\frac{1}{28}b,\ a_6 = \frac{1}{1200}a^2,\ a_7 = \pm\frac{17}{12320}ab,\ a_8 = \frac{39}{68992}b^2,$$

$$b_3 = \mp\frac{1}{20}a,\ b_4 = -\frac{1}{14}b,\ b_7 = \pm\frac{1}{4800}a^2,\ b_8 = \frac{3}{3080}ab,\ b_9 = \pm\frac{25}{34496}b^2,$$

а остальные коэффициенты можно найти по рекуррентным формулам. Ряды (2) сходятся в области $0 \neq |z - z_0| < \delta,\ \ \delta > 0$.

Исключая из системы (1) a и b, получим систему

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2}\dfrac{x'^2}{x} - 2x^2 + \dfrac{3}{2}xy^2, \\ y'' = -6xy + 2y^3, \end{cases} \tag{3}$$

резонансы которой равны -1, -2, 4, 5. Легко проверить, что уравнения системы (1) являются первыми интегралами системы (3). При этом коэффициенты a и b будут произвольными постоянными интегрирования системы (3), отвечающими соответственно резонансам 4, 5.

Из работы [1] следует, что верна

Теорема 1. *Общее решение системы (1) является мероморфным.*

Имеет место

Теорема 2. *Упрощенная для (1) система*

$$\begin{cases} xy'^2 - 2x'^2 = xy^4 - 6x^2y^2 + 4x^3, \\ x'^2y - 2xx'y' = 4x^3y - x^2y^3 \end{cases} \tag{4}$$

имеет общее решение

$$x = \frac{1}{(t-c_1)(t-c_2)}, \qquad y = \pm\left(\frac{1}{t-c_1} + \frac{1}{t-c_2}\right), \tag{5}$$

где c_1, c_2 *– произвольные постоянные.*

Лемма. *Функции (5) удовлетворяют условию*

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{4}{x} = C, \ \ C = (c_1 - c_2)^2, \tag{6}$$

а значит, (6) является интегралом системы (4).

Литература

1. Бибило Е. Р., Мартынов И. П. *Мероморфность решений одного класса систем дифференциальных уравнений* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2014. № 3(180). С. 54–58.

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Т.Н. Ванькова, Е.Е. Кулеш, В.М. Пецевич

Целью данной работы является поиск необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у решений системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= (\alpha_1 x + \alpha_2)x(y + \alpha_3)^2, \\ y'^2 &= x(y^2 + \beta_1 y + \beta_2), \end{aligned} \tag{1}$$

где $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, α_i, β_j – аналитические функции переменной t при условии $\beta_2 = \alpha_3^2$.

Запись $P \neq 0$ означает, что P не обращается в нуль в некоторой области D.

Система (1) является частным случаем системы

$$\begin{aligned} &x'^2 = (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})\, y^2 + \\ &\quad + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})\, y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\ &y'^2 = (b_{41}y^4 + b_{31}y^3 + b_{21}y^2 + b_{11}y + b_{01})x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00} \end{aligned} \qquad (2)$$

с аналитическими по t коэффициентами, где

$$|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0, \quad |b_{41}| + |b_{31}| + |b_{21}| + |b_{11}| + |b_{01}| \neq 0.$$

Система (2), когда $b_{41} = b_{31} = b_{21} = b_{11} = 0$, $b_{01} \neq 0$, рассматривалась в [1]. Случай, когда $b_{41} = b_{31} = b_{21} = 0$, $b_{11} \neq 0$, рассматривался в [2]. Случай, когда $|b_{41}| + |b_{31}| \neq 0$, рассматривался в [3].

Система (1) является одной из 7 систем, которые являются необходимыми условиями наличия свойства Пенлеве у системы

$$\begin{aligned} &x'^2 = (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})\, y^2 + \\ &\quad + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})\, y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\ &y'^2 = (y^2 + b_{11}y + b_{01})x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00} \end{aligned}$$

с аналитическими по t коэффициентами, где $|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0$ [4].

Исключая из системы (1) компоненту x, относительно компоненты y построим дифференциальное уравнение. Используя метод малого параметра и некоторые леммы из [5], [6], получим дополнительные условия на коэффициенты системы (1).

Построив уравнение относительно компоненты x и используя метод резонансов, тест Пенлеве, метод сравнения полученных уравнений с уравнениями, аналитические свойства решений которых известны, устанавливаем, что справедлива

Теорема. *Для того, чтобы дифференциальная система (1) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она дробно-линейным преобразованием x, y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из видов:*

$$\begin{aligned} &x'^2 = K_1(x + K_2)x(y + \alpha_3)^2, \qquad && x'^2 = K_1 e^{K_2 t} x(y + \alpha_3)^2, \\ &y'^2 = x(y + \alpha_3)^2; && y'^2 = x(y + \alpha_3)^2, \end{aligned}$$

где $K_1 \neq 0$, K_2 – некоторые постоянные, α_3 – аналитическая функция переменной t.

Литература

1. Ванькова Т. Н., Детченя Л. В., Пецевич В. М., Селивёрстова А. О. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка без подвижных критических особенностей* // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 4(37). С. 62–65.

2. Белько О. Н., Ванькова Т. Н., Пецевич В. М. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве* // Веснiк ГрДУ iмя Янкi Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фiзiка. Iнфарматыка, вылiчальная тэхнiка i кiраванне. 2020. Т. 10. № 3. С. 42–49.

3. Детченя Л. В., Кулеш Е. Е., Пецевич В. М. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве для системы дифференциальных уравнений второго порядка второй степени специального вида* // Веснiк ГрДУ iмя Янкi Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фiзiка. Iнфарматыка, вылiчальная тэхнiка i кiраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 30–35.

4. Детченя Л. В., Кулеш Е. Е., Пецевич В. М. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у дифференциальной системы второго порядка* // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвящ. 100-летию со дня рождения проф. Ю.С. Богданова: материалы Междунар. математич. конф., Минск, 1-4 июля 2021 г. Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2021. С. 59–60.

5. Пецевич В. М., Пронько В. А. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени* // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 2(35). С. 69–75.

6. Пецевич В. М., Шевченя Д. Н. *Свойство Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка* // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 1(26). С. 48–51.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИИ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В.И. Громак

Известно, что уравнения Пенлеве $(P_1 - P_6)$, которые являются решением классификационной проблемы относительно свойства Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в общем случае определяют новые трансцендентные функции. Эти функции находят приложения как в различных математических проблемах, так и в различных вопросах физики, математической физики и играют, по сути, такую же роль в нелинейных проблемах как и классические специальные функции в линейных проблемах. В этой связи в настоящее время существует определенный интерес в изучении иерархий уравнений Пенлеве, которые являются бесконечными последовательностями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих единую дифференциально–алгебраическую структуру, при этом первыми членами таких иерархий являются уравнения Пенлеве. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, при специальных значениях параметров имеют специальные классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения. При этом для рациональных решений возникает задача представления их через специальные полиномы [1–7].

Известно, что рациональные решения обобщенных иерархий второго уравнения Пенлеве

$$\widetilde{P}_2^{[2N]} \equiv (D+2w)\,\widetilde{L}_N[w'-w^2] - zw - \alpha = 0, \quad D = \frac{d}{dz}, \quad w = w(z), \quad N = 1, 2, ..., \tag{1}$$

и модифицированного второго уравнения Пенлеве (обобщенная иерархия уравнения P_{34})

$$\Psi'' = \frac{(\Psi')^2}{2\Psi} - 2q\Psi - \frac{\sigma^2}{2\Psi} = 0, \quad q(z) := w'(z) - w(z)^2, \quad \Psi(q(z)) := \widetilde{L}_N[q] - z/2, \tag{2}$$

где оператор $\widetilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением

$$\widetilde{L}_{N+1}[u] = D^{-1}\big((D^3 + (4u+\beta_N)D + 2u_z)\widetilde{L}_N[u]\big),$$

$$\widetilde{L}_1[u] = u, \quad u = u(z)$$

и α, β_N – параметры, можно определить через специальные полиномиальные определители (детерминантное представление Jacobi-Trudi). При этом рациональные решения $w^{[N]}(z,\alpha,\beta)$, $q^{[N]}(z,\sigma,\beta)$, $\sigma = \alpha - 1/2$, существуют только при целом α, единственны при фиксированном β и при $\alpha = m \in \mathbb{N}$ справедлива

Теорема 1. *Рациональное решение N-го уравнения иерархий (1), (2) может быть представлено как*

$$w^{[N]}(z, \pm m, \beta) = \pm D\left\{\ln(\tau_{m-1}^{[N]}/\tau_m^{[N]})\right\}, \quad q^{[N]}(z, \pm(m+1/2), \beta) = 2D^2\left\{\ln(\tau_m^{[N]})\right\},$$

где полиномиальная τ-функция $\tau_m^{[N]}(z)$ есть $(m\times m)$-определитель

$$\tau_m^{[N]} = \begin{vmatrix} p_m^{[N]}(z) & p_{m+1}^{[N]}(z) & \dots & p_{2m-1}^{[N]}(z) \\ p_{m-2}^{[N]}(z) & p_{m-1}^{[N]}(z) & \dots & p_{2m-3}^{[N]}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{-m+2}^{[N]}(z) & p_{-m+3}^{[N]}(z) & \dots & p_1^{[N]}(z) \end{vmatrix},$$

где полиномы $p_m^{[N]}(z)$ $\big(p_m^{[N]}(z)=0$ для $m<0\big)$ определяются образующей функцией $\Phi(z,\lambda)$ формального параметра λ

$$\Phi(z,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{[N]}(z)\lambda^k, \quad \Phi(z,\lambda)=\exp\left(z\lambda-\sum_{l=1}^{N}\frac{4^l s_{N-l}}{2l+1}\lambda^{2l+1}\right),$$

где $s_0=1$; s_l, $l=1,\dots,N-1$, – основные симметрические полиномы параметров β_1, $\dots$, β_{N-1}. Если $\alpha=m=0$, то $w^{[N]}(z,0,\beta)=0$, $w^{[N]}(z,\pm1,\beta)=\mp1/z$, $q^{[N]}(z,\pm1/2,\beta)=-2/z^2$.

Справедлива

Теорема 2. *Полиномы $p_m^{[N]}(z)$ удовлетворяют линейному разностному уравнению порядка $2N+1$ и линейному дифференциальному уравнению*

$$(4^N D^{2N+1}+4^{N-1}s_1D^{2N-1}+...+4^{N-2}s_{N-1}D^3-zD+m)p_m^{[N]}=0, \tag{3}$$

где $s_0=1$; s_j, $j=1,...,N-1$, – основные симметрические полиномы параметров β_1, β_2, $\dots$, β_{N-1}, $N=2,3,\dots$.

Заметим, что в случае $s_1=s_2=...=s_{N-1}=0$, что соответствует стационарной иерархии $P_{34}^{[2N]}$, уравнение (3) имеет вид

$$(4^N D^k - zD + m)p_m^{[N]}=0, \quad k=2N+1, \tag{4}$$

для которого единственная особая точка $z=\infty$ является иррегулярной. Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$p_m^{[N]}=$$

$$=c_1\cdot {}_1F_{2N}\left(-\frac{m}{k};\frac{1}{k},\frac{2}{k},\dots,\frac{k-1}{k};\varsigma\right)+c_2z\cdot {}_1F_{2N}\left(\frac{1-m}{k};\frac{2}{k},\frac{3}{k},\dots,\frac{k-1}{k},\frac{k+1}{k};\varsigma\right)+$$

$$+\ldots+c_kz^{k-1}\cdot {}_1F_{2N}\left(\frac{k-1-m}{k};\frac{k+1}{k},\frac{k+2}{k},\dots,\frac{2k-1}{k};\varsigma\right), \tag{5}$$

где $\varsigma=z^k(2k)^{-2N}$, c_k – произвольные постоянные, а ${}_1F_q\,(a;b_1,b_2,...,b_q;\varsigma)$ – обобщенная гипергеометрическая функция, определяемая

$${}_1F_q\,(a;b_1,b_2,...,b_q;\varsigma)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(a)_j}{(b_1)_j\cdot(b_2)_j\cdot\ldots\cdot(b_q)_j}\frac{\zeta^j}{j!},$$

где $(a)_j=a(a+1)...(a+j-1)=\Gamma(a+j)/\Gamma(a)$ и $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция. Если $m\in$ $\in\mathbb{Z}^+$, как в нашем случае, то одна из гипергеометрических функций, входящих в (5), обращается в полином по z, так как в этом случае функция

$${}_1F_{2N}\big(-m;b_1,b_2,...,b_{2N};z^k(2k)^{-2N}\big)$$

есть полином z, который и определяет полином $p_m^{[N]}(z)$. Заметим, что при $N=1$ уравнение (4) с общим решением (5) в этом случае получены в [2].

Литература

1. Kajiwara K., Ohta Y. *Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation* // J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 4393–4704.

2. Clarkson P. A. *Painlevé equations – nonlinear special functions.* Lect. Notes in Math. Springer-Verlag. 2006. V. 1883. P. 331–411.

3. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane* // De Gruyter. Studies in Mathematics. V. 28. Berlin; New-York, 2002.

4. Демина М. В., Кудряшов Н. А. *Специальные полиномы и рациональные решения иерархии второго уравнения Пенлеве* // Теоретическая и математическая физика. 2007. Т. 153. № 1. С. 58–67.

5. Bobrova I. *On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications* // arXiv: 2010.10617v2 [nlin.SI].

6. Громак В. И. *Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1017–1033.

7. Громак В. И. *О свойствах решений уравнений обобщенной иерархии уравнения P_{34}* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 153–163.

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ СО ВТОРЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

Е.В. Громак

В работе рассматриваются аналитические свойства решений линейных уравнений второго порядка с потенциалом, зависящим от мероморфных решений второго уравнения Пенлеве. Методом Фробениуса установлены достаточные условия мероморфности общего решения. Установлена интегрируемость в рациональных функциях линейного уравнения второго порядка с потенциалом, связанным с рациональными решениями второго уравнения Пенлеве.

Известно, что решения второго уравнения Пенлеве

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha \tag{1}$$

являются мероморфными фукциями [1, 2]. Одним из основных инструментов исследования аналитических свойств решений $w_\alpha = w(z,\alpha)$ уравнения (1) является преобразование Беклунда, которое позволило, в частности, доказать трансцендентность уравнения (1), а также разбить множество решений на три класса: 1. Рациональные решения; 2. Решения Эйри; 3. Трансцендентные решения, т.е. решения, не входящие в первые два класса [3].

Рациональные решения существуют только при $\alpha \in \mathbb{Z}$. Они порождаются тривиальным решением $w = 0$ при $\alpha = 0$ и последовательным применением к нему преобразования Беклунда. При каждом $\alpha \in \mathbb{Z}$ рациональное решение единственно и имеет структуру

$$w(z) = \frac{Q'_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)} - \frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)}, \quad \alpha = n \in \mathbb{N},$$

где полиномы Яблонского-Воробьева $Q_n = Q_n(z)$ определяются рекуррентным соотношением [4, 5]

$$Q_{n+1}Q_{n-1} = zQ_n^2 - 4\big(Q_nQ''_n - (Q'_n)^2\big), \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = z.$$

Для $\alpha = -n,\ n \in \mathbb{N}$, рациональное решение $w_{-n}(z) = -w_n(z)$ и $w = 0$ для $\alpha = 0$. Каждое рациональное решение имеет $l_+ = \alpha(\alpha-1)/2$ и $l_- = \alpha(\alpha+1)/2,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+$, полюсов с вычетом 1 и -1 соответственно.

Решения второго класса порождаются решениями уравнений Риккати

$$w' = \varepsilon_1 w^2 + \varepsilon_1 z/2, \quad \alpha = \varepsilon_1/2, \quad \varepsilon_1^2 = 1$$

при последовательном применении к ним преобразований Беклунда. Эти решения удовлетворяют уравнениям P-типа первого порядка

$$w' + \sum_{j=1}^{n} P_j(z, w) w^{n-j} = 0, \quad \alpha = m + 1/2, \quad m \in \mathbb{Z}$$

и рациональным образом выражаются через функции Эйри и ее производные. Произвольное решение $w(z)$ из третьего класса имеет бесконечное число полюсов как с вычетом 1, так и с вычетом -1 [3].

Заметим, что решение $w(z) \neq 0$ уравнения (1) в окрестности полюса $z = z_0$ имеет разложение

$$w(z) = \frac{\varepsilon}{t} + \frac{1}{6} - \varepsilon z_0 t - \frac{\alpha + \varepsilon z}{4} t^2 + h t^3 + \frac{3\alpha + \varepsilon}{72} z_0 t^4 + O(t^5),$$

где $z - z_0 = t$, h – произвольная постоянная, $\varepsilon^2 = 1$.

Известно, что общее решение линейного уравнения $u'' + (\lambda \wp(z) + \mu) u = 0$, где $\wp(z)$ – двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса с периодами ω, ω' и двукратными полюсами в точках $m\omega + m'\omega'$, $m', m \in \mathbb{Z}$, μ – произвольное постоянное, $\lambda = -n(n+1)$, где $n \in \mathbb{N}$ (уравнение Ламе), представляет собой мероморфную функцию [6].

В настоящей работе на множестве решений уравнения (1) рассмотрим линейное уравнение

$$u'' + (a w^2 + b w + c w' + \mu) u = 0, \tag{2}$$

где $w(z)$ – фиксированное решение уравнения (1), а a, b, c, μ – постоянные параметры. Нас интересуют условия на параметры, при выполнении которых общее решение уравнения (2) мероморфно или даже рационально. Ясно, что уравнение (2) – уравнение с конечными регулярными особыми точками в полюсах $w(z)$ и для построения фундаментальной системы можно использовать метод Фробениуса. При этом предполагаем, что уравнение (2) с регулярными конечными особыми точками $z = z_j$, корни определяющих уравнений, т.е. показатели, относящиеся к особым точкам $z = z_j$, целые и разложения решений в окрестностях особых точек не содержат логарифмов $ln(z - z_j)$. Справедлива

Теорема 1. *Если для уравнения (2), где $w(z)$ – фиксированное решение уравнения (1), выполняется хотя бы одно из условий*

$$\begin{aligned} &a)\ a = b = c = 0;\ \ n = p = 0; \\ &b)\ a = -1,\ \ b = 0,\ \ c = 1;\ \ \ n = 1,\ \ p = 0; \\ &c)\ a = -1,\ \ b = 0,\ \ c = -1;\ \ n = 0,\ \ p = 1, \end{aligned} \tag{3}$$

то общее решение уравнения (2) мероморфно.

Исключая тривиальный случай (3a), в случаях (3b) и (3c) имеем уравнения

$$u'' + (-w^2 + \varepsilon_2 w' + \mu) u = 0, \quad \varepsilon_2^2 = 1. \tag{4}$$

Для того, чтобы общее решение уравнения (4) было рациональным, необходимо, чтобы для решения $u(z)$ точка $z = \infty$ была полюсом или точкой голоморфности. Справедлива

Теорема 2. *Если в уравнении (4) $\mu = 0$ и $w(z) = Q'_{n-1}(z)/Q_{n-1}(z) - Q'_n(z)/Q_n(z)$ – рациональное решение уравнения (1) при $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$, где Q_n – полиномы Яблонского-Воробьева, то общее решение уравнения (4) имеет вид $u(z) = (C_1 Q_n + C_2 Q_{n-2})/Q_{n-1}$ при $\varepsilon_2 = 1$ и $u(z) = (C_1 Q_{n-1}(z) + C_2 Q_{n+1}(z))/Q_n(z)$ при $\varepsilon_2 = -1$.*

Литература

1. Голубев В. В. *К теории уравнений Пенлеве* // Мат. сборник. 1912. Т. 28. С. 323–349.

2. Hinkkonen A., Laine I. *Solutions of the first and second Painleve equations are meromorphic* // J. Anal Math. 79(1999). P. 345–377.

3. Gromak V. I. *The Backlund transformations of the higher order Painleve Equations* // Centre de Recherches Mathematiques, CRM Proceeding and Lecture Notes. 2001. V. 29. P. 3–28.

4. Яблонский А. И. *О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве* // Изв. БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1959. Т. 3. С. 30–35.

5. Воробьев А. Р. *О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве* // Дифференицальные уравнения. 1965. Т. 1. С. 79–81.

6. Гурса Э. *Курс математического анализа.* ГТТИ: М-Л., Том 3, Часть 2, 1933.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ИЕРАРХИИ РИККАТИ

Е.В. Кузьмина

В работе [1] была построена иерархия уравнений, порожденная уравнением Риккати

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0.$$

Это уравнения вида

$$D_R^n w = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где D_R есть преобразование дифференциальных выражений, действующее по формуле

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

При $n = 2$ получаем второе уравнение из иерархии Риккати

$$w''(z) + \gamma^2 w^3(z) + 3\gamma w(z) w'(z) = 0, \tag{1}$$

которое и будет предметом исследования.

Лемма. *Решение задачи Коши для уравнения (1) с условиями $w(z_0) = C_1$, $w'(z_0) = C_2$ является рациональной функцией и имеет следующий вид:*

1) если $C_2 \neq -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, $C_2 \neq -\gamma C_1^2$, то

$$w(z) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b}\right], \quad \text{где} \tag{2}$$

$$a = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}, \; b = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2},$$

а знаком $\sqrt{}$ обозначена одна из ветвей многозначной аналитической функции;

2) если $C_2 = -\gamma C_1^2$, то

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)}, \quad \text{где} \quad a = z_0 - \frac{1}{\gamma C_1};$$

3) если $C_2 = -\dfrac{1}{2}\gamma C_1^2$, *то*

$$w(z) = \frac{2}{\gamma(z-a)}, \quad \textit{где} \quad a = z_0 - \frac{2}{\gamma C_1}.$$

При другом выборе ветви a и b меняются местами.

Рассмотрим уравнение (1) на прямой, т.е. уравнение вида

$$u''(x) + \gamma^2 u^3(x) + 3\gamma u(x)u'(x) = 0, \tag{3}$$

и задачу Коши для этого уравнения с начальными условиями в точке x_0 на прямой и вещественными C_1, C_2. По начальным условиям Коши решение этого уравнения однозначно определяется только на части прямой. Но формула (2) задает функцию, однозначно определенную на всей прямой, которую будем называть *формальным решением задачи Коши.*

Если $C_1^2 > -\dfrac{2}{\gamma}C_2$, то формальное решение является гладким и единственным обобщенным решением.

Если один или два полюса лежат на вещественной оси, то формальное решение имеет особенности. Такое решение будем называть *сингулярным.* Ему соответствует семейство обобщенных функций [2]. Подставить распределение в уравнение нельзя, так как не определено произведение обобщенных функций. Поэтому требуется выяснить, какие из распределений, соответствующих формальному решению, и в каком смысле можно считать решениями уравнения (1) на прямой.

Пусть $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, $C_1(\varepsilon) \to C_1$, $C_2(\varepsilon) \to C_2$ при $\varepsilon \to 0$ и $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ таковы, что решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для уравнения (1) с условиями $w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon)$, $w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon)$ не имеют особенностей на вещественной оси.

Определение. Распределение W будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (3) с условиями $u(x_0) = C_1$, $u'(x_0) = C_2$ при заданном способе аппроксимации начальных условий, если $w_\varepsilon(x)$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ к W в смысле сходимости в пространстве $D'(\mathbb{R})$.

Теорема. *Если* $C_1^2 < -\dfrac{2}{\gamma}C_2$, $C_2 \neq -\gamma C_1^2$, *то решения задачи Коши для уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям* $w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon)$, $w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon)$, *где* $C_1(\varepsilon) \to C_1$, $C_2(\varepsilon) \to C_2$ *при* $\varepsilon \to 0$, *имеют вид*

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{x-a_\varepsilon} + \frac{1}{x-b_\varepsilon}\right],$$

где полюса

$$a_\varepsilon = x_0 - \frac{C_1(\varepsilon)}{\gamma C_1^2(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)} + q_\varepsilon, \quad b_\varepsilon = x_0 - \frac{C_1(\varepsilon)}{\gamma C_1^2(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)} - q_\varepsilon$$

не лежат на вещественной прямой и $a_\varepsilon \to a, b_\varepsilon \to b$ *при* $\varepsilon \to 0$,

$$q_\varepsilon^2 = -\frac{2C_2(\varepsilon) + \gamma C_1^2(\varepsilon)}{\gamma\big(\gamma C_1^2(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)\big)^2}.$$

Семейство $w_\varepsilon(x)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *почти всюду сходится к формальному решению, заданному формулой (2) на прямой.*

В пространстве $D'(\mathbb{R})$ семейство $w_\varepsilon(x)$ сходится тогда и только тогда, когда знаки $\operatorname{Im} a(\varepsilon)$ и $\operatorname{Im} b(\varepsilon)$ постоянны при достаточно малых ε и, в зависимости от этих знаков, обобщенным решением является одно из четырех распределений

$$W^{\pm,\pm} = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-b}\right) \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_b.$$

Возможны два вырожденных случая.

1. Если $C_2 = -\gamma C_1^2$, то $b = \infty$, $a = x_0 - \dfrac{1}{\gamma C_1}$ и, в зависимости от способа аппроксимации начальных условий, имеется два обобщенных решения

$$W^{\pm} = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a.$$

2. Если $C_2 = -\dfrac{1}{2}\gamma C_1^2$, то точки a и b совпадают на вещественной прямой. В зависимости от способа аппроксимации начальных условий существуют три обобщенных решения

$$W^{\pm} = \frac{2}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) \pm i\pi\frac{2}{\gamma}\delta_a, \ W = \frac{2}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

Таким образом, в зависимости от начальных условий второе уравнение иерархии Риккати может иметь одно, два, три или четыре обобщенных решения.

Литература

1. Грицук Е. В., Кузьмина Е. В. *Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве* // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. 2017. № 2. С. 64–72.
2. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.

О НЕКОТОРЫХ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Г.Т. Можджер

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2} + a_3yy'' + a_4y'^2 + a_5y^2y', \quad a_5 \neq 0, \tag{1}$$

где a_i, $i = \overline{1,5}$, – постоянные коэффициенты.

Упрощенным уравнением к уравнению (1) является уравнение

$$y''' = a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2},$$

которое имеет характеристический многочлен $\varphi(\lambda) = 2\lambda^2 + (a_1+1)\lambda - a_2$.

Отсюда, согласно [1], имеем, что $a_1 + 1 = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$, $a_2 = -2\lambda_1\lambda_2$, где λ_1, λ_2 – корни характеристического многочлена.

Предположим, что уравнение (1) имеет первый интеграл веса $p_1 = 2k$ вида

$$y^{2k-12}y''^4 + \sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{2n+1} A_{n,m}y^{2k+2m-n-14}y'^{2n+1-m}y''^{4-n} = K, \tag{2}$$

где $A_{n,m}$ – произвольные постоянные, K – произвольная постоянная интегрирования.

Пусть корни характеристического уравнения $\varphi(\lambda)$ будут

$$\lambda_1 = \frac{k-8}{4},\ \lambda_2 = \frac{k(2p+3)-8(2p-1)}{4(2p-1)}. \tag{3}$$

Найдем условия на коэффициенты уравнения (1), при которых оно имеет первый интеграл вида (2). Для этого продифференцируем (2) с учетом (1). Получим

$$\begin{gathered} 4a_1 + 2k - 12 + 2A_{1,1} = 0, \quad 4a_3 + A_{1,2} = 0, \\ (4-n)(a_2A_{n,m} + a_4A_{n,m-1} + a_5A_{n,m-2}) + (3-n)a_3A_{n+1,m-1} + \\ +\big((3-n)a_1 + 2k - 15 - n + 2m\big)A_{n+1,m} + (2n-m+5)A_{n+2,m} = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$n = \overline{0,3}, \quad m = \overline{1, 2n+4},$$

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0,\ j = 1, \\ 0, & \text{если } i = 0, j \neq 1; \text{ или } j \leq 0; \text{ или } i > 4; \text{ или } j > 2i+1. \end{cases}$$

Найдем случаи, когда условия (4) совместны, и в результате выделим все классы уравнений (1), которые имеют первые интегралы вида (2) при условии (3), то есть

$$a_1 = 7 - \frac{2p+1}{2p-1}k, \quad a_2 = -\frac{(k-8)(k(2p+3)-8(2p-1))}{8(2p-1)}. \tag{5}$$

В частности, если положить $p = \dfrac{5}{2}$, $a_4 = \dfrac{1}{2}a_3(k-4)$, $a_5 = 2a_3^2$, то уравнение (1) и первый интеграл (2) примут соответственно вид

$$y''' = (7-3k/2)\frac{y'y''}{y} - \frac{1}{4}(k-4)(k-8)\frac{y'^3}{y^2} + a_3yy'' + \frac{1}{2}a_3(k-4)y'^2 + 2a_3^2y^2y', \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{48k^4}y^{2k-16}\Big\{3k^4(2yy''+(k-4)y'^2)^4 - 4a_3k^4(2yy''+(k-4)y'^2)\Big(6(2yy''+(k-4)y'^2)^2 + \\ +c(18yy''+(5k-36)y'^2)y^4\Big)y^2y' + 4a_3^2k^3\Big(6k(2yy''+(k-4)y'^2)^2 - \\ -c(96y^2y''^2+48(k-8)yy'^2y''+(5k^2-96k+384)y'^4)y^4\Big)y^4 + 32a_3^3k^3\Big(5k(2yy'' + \\ +(k-4)y'^2)y'^2 + 8c(3yy''+(k-6)y'^2)y^4\Big)y^6y' - 16a_3^4k^2\Big(96y^2y''^2 + \\ +48(k-2)yy'^2y'' + (17k^2-96k+384)y'^4 - 8c(8yy''+(k-16)y'^2)y^4\Big)y^8 + \\ +256a_3^5k^2(12yy''+(k-24)y'^2-4cy^4)y^{10}y' + 512a_3^6k(8yy''+(k-16)y'^2-2cy^4)y^{12} - \\ -4096a_3^7kyy^{14}y' - 4096a_3^6y^{16} + 3ck^4(4yy''+(k-8)y'^2)(2yy''+(k-4)y'^2)^2y^4\Big\} = K. \end{gathered} \tag{7}$$

Если положить $p = \dfrac{29}{2}$, $a_4 = \dfrac{2}{7}a_3(2k-7)$, $a_5 = \dfrac{4}{9}a_3^2$, то уравнение (1) и первый интеграл (2) примут соответственно вид

$$y''' = (7-15k/14)\frac{y'y''}{y} - \frac{1}{7}(k-7)(k-8)\frac{y'^3}{y^2} + a_3yy'' + \frac{2}{7}a_3(2k-7)y'^2 + \frac{4}{9}a_3^2y^2y', \tag{8}$$

$$\frac{1}{78764805k^4}y^{2k-16}\Big\{32805k^4(7yy''+2(k-7)y'^2)^4-2187a_3k^4\Big(144060y^3y''^3+$$
$$+3430(37k-252)y^2y'^2y''^2+98(379k^2-5180k+17640)yy'^4y''+(3613k^3-74284k^2+$$
$$+507640k-1152480y'^6)y'^6\Big)y^2y'-500094a_3^2k^3\Big(980y^3y''^3-210(k+28)y^2y'^2y''^2-$$
$$-30(13k^2-28k-392)yy'^4y''-(71k^3-780k^2+840k+7840)y'^6\Big)y^4+$$
$$+333396a_3^3k^3\Big(4410y^2y''^2+1260(k-14)yy'^2y''-(23k^2+2520k-17640)y'^4\Big)y^6y'+$$
$$+7779240a_3^4k^2\Big(98y^2y''^2-28(5k+14)yy'^2y''-(31k^2-280k-392)y'^4\Big)y^8-$$
$$-108909360a_3^5k^2(14yy''-(k+28)y'^2)y^{10}y'-33882912a_3^6k(14yy''-(19k+28)y'^2)y^{12}-$$
$$-474360768a_3^7ky^{14}y'+105413504a_3^8y^{16}\Big\}=K. \tag{9}$$

Таким образом, верна

Теорема. *Если для уравнения (1) выполнены соотношения (5) и имеют место условия*

$$p=\frac{5}{2},\quad a_4=\frac{1}{2}a_3(k-4),\quad a_5=2a_3^2,$$

то уравнение (6) примет вид (7).

Если же имеют место условия (5) и

$$p=\frac{29}{2},\quad a_4=\frac{2}{7}a_3(2k-7),\quad a_5=\frac{4}{9}a_3^2,$$

то уравнение (8) примет вид (9).

Литература

1. Можджер Г. Т. *Первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений высших порядков с рациональной правой частью*: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. Гродно, 2006.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.А. Мухин, В.А. Пронько, И.П. Мартынов

Если решение уравнения

$$y^2y'y'''=ay^2\left(y''\right)^2+by\left(y'\right)^2y''+c\left(y'\right)^4 \tag{1}$$

представить в виде

$$y=\alpha\left(z-z_0\right)^{-s}+...+h\left(z-z_0\right)^{r-s},\quad s\neq 0, \tag{2}$$

то решению (2) будем сопоставлять набор $(s,\alpha;-1,r_1,r_2)$. При этом s должно удовлетворять соотношению

$$(a+b+c-1)\,s^2+(2a+b-3)\,s+a-2=0. \tag{3}$$

Имеет место

Лемма 1. *Если при* $a\neq 0$ *в уравнении (1) имеет место*

$$b=3+\frac{4}{n}-2a\left(1+\frac{1}{n}\right)^2,\quad c=(a-2)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

то уравнение (3) дает кратные значения для s *:*

$$(s-n)^2=0.$$

Уравнение (1) заменим системой

$$\begin{cases} y'=nuy,\\ u''=\dfrac{a(u')^2}{u}+2\,(2-a)\,uu'+(a-2)\,u^3,\ n\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{5}$$

Имеет место

Теорема 1. *Второе уравнение системы (5) имеет подвижные логарифмические особые точки.*

Следствие 1. *Уравнение (1) при условии (4) имеет общее решение с логарифмическими особенностями.*

Пусть $a=0$, тогда уравнение (1) при условии (4) примет вид

$$y^2y'''=\left(3+\frac{4}{n}\right)yy'y''-\left(1+\frac{1}{n}\right)^2(y')^3. \tag{6}$$

Лемма 2. *Уравнение (6) имеет промежуточный интеграл*

$$(y')^2=y^{2+\frac{2}{n}}\,(C_1\ln y+C_2), \tag{7}$$

где $C_1,\ C_2$ *– произвольные постоянные.*

Теорема 2.

1) Если $C_1=0$ *и выполняется условие* $n^2=C_2\gamma^{\frac{2}{n}}$, *то уравнение (7) имеет двухпараметрическое рациональное решение*

$$y=\gamma\,(z-z_0)^{-n}.$$

2) Если $C_1\neq 0$, *то решение уравнения (7) можно представить в виде*

$$y=A\exp(2v^2), z-z_0=B\int e^{-\frac{2}{n}v^2}dv,$$

причем $C_2=-2C_1\ln A,\ \ A^{\frac{2}{n}}B^2C=8.$

Замечание. При $n=2$ заключение теоремы 2 согласуется с результатом из [1].

Литература

1. Яблонский А. И. *Аналитические свойства решений систем дифференциальных уравнений*: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.003. Минск, 1971.

О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ПУАНКАРЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ФУНКЦИЙ

Л.А. Хвощинская

Рассматривается система дифференциальных уравнений класса Фукса для вектор-функции $Y(z) = (y_1, y_2)$

$$\frac{dY}{dz} = Y\left(\frac{U_1}{z-a_1} + \frac{U_2}{z-a_2}\right) \tag{1}$$

с (2×2)-матрицами-вычетами U_1, U_2 и тремя особыми точками a_1, a_2, $a_3 = \infty$. Требуется указать невырожденные (2×2)-матрицы V_1, V_2, V_3, образующие группу монодромии системы (1) и обладающие следующими свойствами:

$$V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = E \quad \text{и} \quad V_k \sim \exp(2\pi i U_k), \quad k = 1, 2.$$

Пусть ρ_k, σ_k – характеристические числа матриц U_k, $k = 1, 2$, а ρ, σ – характеристические числа матрицы $U_1 + U_2$. В работе [1] показано, что характеристические числа матриц U_k удовлетворяют неравенствам

$$|\mathrm{Re}\,(\rho_k - \sigma_k)| \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \quad \text{и} \quad 0 < \mathrm{Re}\,(\sigma - \rho) \leqslant 1.$$

Тогда числа

$$\alpha_k = \exp(2\pi i \rho_k), \ \beta_k = \exp(2\pi i \sigma_k), \ k = 1, 2,$$
$$\alpha_3 = \exp(-2\pi i \rho), \ \beta_3 = \exp\big(2\pi i(1-\sigma)\big)$$

являются характеристическими числами матриц монодромии V_1, V_2, V_3, причем

$$\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3 = 1.$$

Обозначим $s_k = \alpha_k + \beta_k$, $d_k = \alpha_k\beta_k$, $k = 1, 2, 3$. Установлено, что жорданова форма матрицы $U_1 + U_2$ может быть только диагональной. При этом матрица может приводиться как к диагональной (при $\sigma - \rho \neq 1$), так и к треугольной (при $\sigma - \rho = 1$) жордановой форме.

Теорема. *Пусть в уравнении (1) ρ_k, σ_k – характеристические числа матриц U_k, $k = 1, 2$, а ρ, σ – характеристические числа матрицы $U_1 + U_2$, $\alpha_k = \exp(2\pi i \rho_k)$, $\beta_k = \exp(2\pi i \sigma_k)$, $k = 1, 2$, $\alpha_3 = \exp(-2\pi i \rho)$, $\beta_3 = \exp\big(2\pi i(1-\sigma)\big)$. Тогда матрицы монодромии уравнения (1) находятся по следующим формулам:*

1) если $\sigma - \rho \neq 1$, то

$$V_1 = \frac{1}{\alpha_3 - \beta_3} D^{-1} \begin{pmatrix} d_1 d_3 s_2 - \beta_3 s_1 & c\,(\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3 - d_1 d_3 s_2) \\ \dfrac{1}{c}\,(d_1 d_3 s_2 - \alpha_1\alpha_3 - \beta_1\beta_3) & \alpha_3 s_1 - d_1 d_3 s_2 \end{pmatrix} D,$$

$$V_2 = \frac{1}{\alpha_3 - \beta_3} D^{-1} \begin{pmatrix} d_2 d_3 s_1 - \beta_3 s_2 & c\,(\alpha_3 s_2 - d_2 d_3 s_2 - d_2\beta_1\alpha_3^2) \\ \dfrac{1}{c}\,(d_2 d_3\alpha_1 + d_2\beta_1\beta_3^2 - \beta_3 s_2) & \alpha_3 s_2 - d_2 d_3 s_1 \end{pmatrix} D;$$

2) если $\sigma - \rho = 1$, то

$$V_1 = D^{-1} \begin{pmatrix} c & d_1\,(d_2\alpha_3 - s_2) \\ \dfrac{(c-\alpha_1)(c-\beta_1)}{d_1\,(s_2 - d_2\alpha_3)} & s_1 - c \end{pmatrix} D,$$

$$V_2 = D^{-1}\begin{pmatrix} s_2 - d_2\alpha_3 c & d_2\left(d_1\alpha_3 s_2 - s_1\right) \\ \dfrac{\alpha_3 c\left(d_2\alpha_3 c - s_2\right) + 1}{s_1 - d_1\alpha_3 s_2} & d_2\alpha_3 c \end{pmatrix} D,$$

$$V_3 = (V_1V_2)^{-1},$$

где c – произвольная постоянная, D – любая невырожденная (2×2)-матрица.

Полученные выше формулы можно использовать при решении задачи Пуанкаре с четырьмя особыми точками, представив матрицу V_4^{-1} в виде произведения двух матриц двумя способами $V_4^{-1} = V_1(V_2V_3)$ и $V_4^{-1} = (V_1V_2)\,V_3$.

Литература

1. Khvostchinskaya L., Rogosin S. *On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions* // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018 (M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers, 2020. P. 79–112.

О СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, АССОЦИИРОВАННОЙ СО ВТОРЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

В.В. Цегельник

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$w_\alpha = -w_{\alpha-\varepsilon} - \varepsilon\frac{(2\alpha-\varepsilon)\varphi'}{2w'_{\alpha-\varepsilon} + 2\varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon\varphi}, \tag{1}$$

$$w_{\alpha-\varepsilon} = -w_\alpha + \varepsilon\frac{(2\alpha-\varepsilon)\varphi'}{2w'_\alpha - 2\varepsilon w^2_\alpha - \varepsilon\varphi} \tag{2}$$

с неизвестными функциями w_α, $w_{\alpha-\varepsilon}$ независимой переменной z, произвольным параметром α, а также параметром $\varepsilon^2 = 1$ и произвольной аналитической функцией $\varphi(z)$ $(\varphi'(z) \not\equiv 0)$.

Из системы (1), (2) при условии

$$(2\alpha-\varepsilon)\varphi' \neq 0 \tag{3}$$

следует, что

$$w'_\alpha - \varepsilon w^2_\alpha + w'_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} = 0. \tag{4}$$

Исключая из (4) при условии (3) неизвестную функцию $w_{\alpha-\varepsilon}$ относительно w_α получим уравнение

$$w''_\alpha = 2w^3_\alpha + \varphi w_\alpha + \alpha\varphi' + \frac{\varphi''}{2\varphi'}(2w'_\alpha - 2\varepsilon w^2_\alpha - \varepsilon\varphi). \tag{5}$$

Если из (4) при условии (3) исключить неизвестную функцию w_α, то относительно $w_{\alpha-\varepsilon}$ получим уравнение

$$w''_{\alpha-\varepsilon} = 2w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varphi w_{\alpha-\varepsilon} + (\alpha-\varepsilon)\varphi' + \frac{\varphi''}{2\varphi'}(2w'_{\alpha-\varepsilon} + 2\varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon\varphi). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $w_\alpha = w(z,\alpha,\varepsilon)$ – решение уравнения (5) при фиксированных значениях α, $\varepsilon^2 = 1$ и условии (3). Тогда функция $w_{\alpha-\varepsilon} = w(z,\alpha-\varepsilon)$, определяемая (2), является решением уравнения (6).*

Теорема 2. *Пусть* $w_{\alpha-\varepsilon} = w(z, \alpha-\varepsilon)$ *– решение уравнения (6) при фиксированных значениях* α, $\varepsilon^2 = 1$ *и условии (3). Тогда функция* w_α, *определяемая (1), является решением уравнения (5).*

Легко видеть, что уравнение (6) получается из (5) заменой $\varepsilon \to -\varepsilon$, $\alpha \to \alpha + \varepsilon$ и наоборот. Сказанное справедливо и по отношению к формулам (2), (1).

Таким образом, формулы (1), (2) определяют прямое и обратное преобразование Беклунда уравнения (5).

Полагая без ограничения общности $\varphi(z) = z$, из (4) получаем второе уравнение Пенлеве

$$w''_\alpha = 2w_\alpha^3 + zw_\alpha + \alpha. \tag{7}$$

Формулы (1), (2) в этом случае имеют вид

$$w_\alpha = -w_{\alpha-\varepsilon} - \varepsilon \frac{2\alpha - \varepsilon}{2w'_{\alpha-\varepsilon} + 2\varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon z}, \tag{8}$$

$$w_{\alpha-\varepsilon} = -w_\alpha + \varepsilon \frac{2\alpha - \varepsilon}{2w'_\alpha - 2\varepsilon w^2_\alpha - \varepsilon z}. \tag{9}$$

Преобразования (8), (9) для уравнения (7) в случае $\varepsilon = 1$ получены в [1].

Нетрудно убедиться в том, что все решения уравнения Риккати $2w'_\alpha = 2w^2_\alpha + \varepsilon\varphi$ являются одновременно решениями уравнения (5) при $2\alpha = \varepsilon$.

Отметим, что уравнение (5) в случае $\varphi''(z) \not\equiv 0$ не является уравнением Пенлеве–типа.

Литература

1. Громак В. И., Лукашевич Н. А. *Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве.* Минск: Университетское, 1990.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПЕРРОНА ПО РЕШЕНИЯМ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е.А. Барабанов, В.В. Быков

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем
$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$
с кусочно-непрерывными коэффициентами, через $\mathcal{M}_n$ – его подкласс, состоящий из систем, коэффициенты которых ограничены на полуоси, а через $x(\cdot;\xi)$ – решение системы (1) с начальным вектором $x(0;\xi) = \xi \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \bigsqcup \bigsqcup \{-\infty, +\infty\}$ расширенную числовую прямую с естественным порядком и порядковой топологией.

Нижним показателем Перрона ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называется [1] величина
$$\pi[x(\cdot)] = \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|, \tag{2}$$
а функция начального вектора $\pi_A \colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством $\pi_A(\xi) = \pi[x(\cdot;\xi)]$, – *показателем Перрона* системы (1). Нижние показатели Перрона представляют собой один из многочисленных примеров асимптотических характеристик – функционалов, определённых на решениях дифференциальных систем и отражающих те или иные качественные или асимптотические их свойства. Важнейший из них – характеристический показатель Ляпунова (его определение получается заменой в (2) нижнего предела верхним). Приведём некоторые известные свойства показателя Перрона, показывающие его принципиальные отличия от показателя Ляпунова.

А.М. Ляпуновым установлено, что число различных показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}_n$ не превосходит её размерности n. О. Перрон обнаружил [1], что для нижних показателей это утверждение неверно. Для диагональных систем из $\mathcal{M}_n$ количество различных значений показателя Перрона не превосходит $2^n - 1$ [2] и может быть любым таким натуральным числом [3].

У недиагональных систем множество значений показателей Перрона может быть устроено гораздо сложнее: в работе [4] построена система, нижние показатели решений которой заполняют целый отрезок, а в работе [5] доказано, что множество S является множеством значений показателей Перрона некоторой системы $A \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда, когда S – ограниченное суслинское множество, содержащее свою точную верхнюю грань.

Несмотря на указанные отличия в строении множеств характеристических и нижних показателей систем (1) множества Лебега сужений этих показателей на аффинные подпространства имеют определённое сходство. Так, Н. А. Изобовым установлено [2, 6], что для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и произвольного аффинного подпространства Π_k размерности k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ в $\mathbb{R}^n$ множество
$$P(\Pi_k) \equiv \Big\{\xi \in \Pi_k \setminus \{\mathbf{0}\} : \pi(\xi) < \sup_{\zeta \in \Pi_k \setminus \{\mathbf{0}\}} \pi(\zeta)\Big\}$$

имеет нулевую k-мерную меру Лебега, т.е.

$$\operatorname{mes} P(\Pi_k) = 0. \tag{3}$$

Другими словами, множество показателей Перрона решений с начальными векторами из аффинной плоскости Π_k содержит свой супремум, и для почти всех по мере Лебега начальных векторов из Π_k решения, из них выходящие, имеют показатель Перрона, равный этому супремуму.

Для одномерных аффинных подпространств приведённое свойство может быть усилено [7]: для любой аффинной прямой Π_1 множество $P(\Pi_1)$ является множеством нулевой $\ln^{\nu}|\ln(\cdot)|$-меры Хаусдорфа при всяком $\nu < -1$.

Легко показывается [8], что множество $P(\Pi_1)$ является $G_{\delta\sigma}$-множеством, а функция π_A – функцией второго класса Бэра. Эти утверждения и приведённое выше утверждение из [7] неулучшаемы [8]: для любого $n \geqslant 2$ существует такая система $A \in \mathcal{M}_n$, что для некоторой прямой Π_1 множество $P(\Pi_1)$ — точное $G_{\delta\sigma}$-множество бесконечной $\ln^{-1}|\ln(\cdot)|$-меры Хаусдорфа, а функция π_A – функция точного второго класса Бэра.

А.Г. Гаргянц [9] обнаружил, что для систем из $\widetilde{\mathcal{M}}_n \backslash \mathcal{M}_n$ при $n \geqslant 2$ свойство (3), вообще говоря, не имеет места. Он также установил [10], что свойство (3) имеет место для всех систем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$, коэффициенты которых растут медленнее любой экспоненты:

$$\varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} \ln \|A(t)\| \leqslant 0.$$

Ставится задача теоретико-множественного описания для каждого натурального n класса функций $\widetilde{\mathcal{P}}_n = \{\pi_A : A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}$.

В [11] доказано, что для любого $n \geqslant 2$ класс $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ содержит все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

$$f(c\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad c \in \mathbb{R}^1 \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{4}$$

Этот результат перенесён в [12] на полунепрерывные сверху функции.

Полное описание класса $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ для любого $n \geqslant 2$ даёт следующая

Теорема. *Функция $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ при $n \geqslant 2$, если и только если она удовлетворяет условию (4) и для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([-\infty, r]\big)$ является G_δ-множеством. Класс $\widetilde{\mathcal{P}}_1$ состоит из всех постоянных функций $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}}$.*

Литература

1. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Zeitschr. 1930. V. 31. № 5. P. 748–766.

2. Изобов Н. А. *О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы* // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 4. С. 469–477.

3. Барабанов Е. А. *Достижимость оценки числа нижних показателей линейной дифференциальной диагональной системы* //Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 12. С. 1069–1072.

4. Изобов Н. А. *О множестве нижних показателей положительной меры* // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 6. С. 1147–1149.

5. Барабанов Е. А. *Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы* // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 1843–1853.

6. Изобов Н. А. *О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 12. С. 2168–2170.

7. Барабанов Е. А. *О распределении нижних показателей Перрона линейных дифференциальных систем на прямых фазового пространства* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 12. С. 2042–2046.

8. Барабанов Е. А. *Точность некоторых утверждений о нижних показателях Перрона* // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 3. С. 200–203.

9. Гаргянц А. Г. *К вопросу о типичности и существенности значений показателя Перрона неограниченных линейных систем* // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1505–1506.

10. Гаргянц А. Г. *О метрической типичности старшего показателя Перрона на решениях линейной системы с медленно растущими коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1011–1017.

11. Гаргянц А. Г. *К вопросу о распределении значений показателей Перрона по решениям систем с неограниченными коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1567.

12. Фоминых Е. И., Касабуцкий А. Ф. *О распределении значений показателя Перрона решений линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами* // XVIII Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2018): Тезисы докладов Междунар. науч. конф. Гродно, 15–18 мая 2018 г. Т. 1. Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2018. С. 58–59.

О МНОЖЕСТВАХ КИНЕМАТИЧЕСКОГО И ОБОБЩЁННО КИНЕМАТИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

Е.Б. Бекряева, Н.С. Нипарко

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ обозначим класс n-мерных линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

матрицы коэффициентов $A(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ которых кусочно-непрерывны на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$, а через $\mathcal{M}_n$ – его подкласс, состоящий из систем с ограниченными на полуоси коэффициентами, т. е. таких, для которых $\sup\{\|A(t)\| : t \in \mathbb{R}_+\} < +\infty$. Через $C\widetilde{\mathcal{M}}_n$ и $C\mathcal{M}_n$ обозначаются подклассы классов $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ и $\mathcal{M}_n$ соответственно, матрицы коэффициентов которых непрерывны. Будем отождествлять систему (1) и её матрицу коэффициентов и вследствие этого писать, например, $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ или $A \in C\mathcal{M}_n$.

Сделав в системе (1) линейную замену переменных $x = L(t)y$ с невырожденной при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и кусочно-дифференцируемой матрицей $L(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, придём к линейной однородной дифференциальной системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

с матрицей $B(\cdot)$, задаваемой равенством

$$B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t) \tag{3}$$

(равенство (3) понимается выполненным всюду на $\mathbb{R}_+$, кроме тех значений t, в которых производная $\dot{L}(t)$ не существует). Кусочно-непрерывные матричнозначные функции $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (3), называют *кинематически подобными относительно матрицы* $L(\cdot)$, а систему (1) *приводимой* к системе (2) преобразованием $x = L(t)y$.

Если $L(\cdot)$ – матрица Ляпунова, т.е. матрица, для которой

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|L(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|L^{-1}(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|\dot{L}(t)\| < +\infty,$$

то системы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, матрицы которых связаны соотношением (3), называются *приводимыми друг к другу*, а сами матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ – *кинематически подобными*. Если же матрица $L(\cdot)$ – матрица обобщённого преобразования Ляпунова, т.е. матрица, для которой

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|L(t)\| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|L^{-1}(t)\| = 0,$$

то системы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, матрицы которых связаны соотношением (3), называются *обобщённо приводимыми друг к другу*, а сами матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ – *обобщённо кинематически подобными*. Следуя работе [1], кинематическое подобие матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ обозначаем как $A(\cdot) \overset{c}{\sim} B(\cdot)$, а их обобщённо кинематическое подобие – как $A(\cdot) \overset{gc}{\sim} B(\cdot)$. Так как мы отождествляем систему и задающую её матрицу коэффициентов, то далее о приводимых (обобщённо приводимых) друг к другу системах мы будем говорить также как о кинематически (обобщённо кинематически) подобных системах. Очевидно, что отношения кинематического подобия и обобщённого кинематического подобия являются отношениями эквивалентности.

Если $L(\cdot)$ – тождественно постоянная матрица, то равенство (3) приводит к обычному подобию матриц, которое в этом случае называют также [2, с. 93] *статическим подобием*. Очевидно, что статически подобные матрицы остаются статически подобными после умножения их на один и тот же скаляр. Для отношения кинематического подобия это, если $n \geqslant 2$, вообще говоря, не так: в [1] построен пример таких кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ из $\mathcal{M}_2$, что, например, матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными. Обобщая эту ситуацию, введём следуя [1] и [3], следующие определения.

Для пары матриц $\big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \widetilde{\mathcal{M}}_n \times \widetilde{\mathcal{M}}_n$ назовём её *множеством кинематического подобия* множество $c(A,B)$ тех $\mu \in \mathbb{R}$, для которых $\mu A(\cdot) \overset{c}{\sim} \mu B(\cdot)$, а *множеством обобщённого кинематического подобия* этой пары матриц – множество тех $\mu \in \mathbb{R}$, для которых $\mu A(\cdot) \overset{gc}{\sim} \mu B(\cdot)$. То, что для кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ в общем случае справедливо неравенство $gc(A,B) \neq \mathbb{R}$, вытекает из упомянутого выше примера из [1]: его матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не только не являются кинематически подобными, но и не являются обобщённо кинематически подобными.

Как следует из работы [1], класс множеств $\{c(A,B) : A(\cdot), B(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}$, если $n \geqslant 2$, совпадает с классом F_σ-множеств числовой прямой, содержащих нуль. Дескриптивно-множественная характеризация класса $\{gc(A,B) : A(\cdot), B(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}$ в настоящее время не известна. Вместе с тем очевидно включение $c(A,B) \subset gc(A,B)$, которое, как показано в [3], является, вообще говоря, собственным: для каждого $n \geqslant 2$ существуют такие системы $A(\cdot), B(\cdot) \in C\mathcal{M}_n$, что $gc(A,B) \setminus c(A,B) \neq \varnothing$. В работе [4] это утверждение усилено до следующего: для каждого $n \geqslant 2$ найдутся системы $A(\cdot), B(\cdot) \in C\mathcal{M}_n$, для которых разность $gc(A,B) \setminus c(A,B)$ не менее, чем счётна.

Результаты работ [3] и [4] содержит следующая

Теорема. *Для каждого $n \geqslant 2$, существуют такие системы $A(\cdot), B(\cdot) \in C\mathcal{M}_n$, для которых разность $gc(A,B) \setminus c(A,B)$ является множеством точного первого борелевского класса.*

Литература

1. Барабанов Е. А. *Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 30. М., 2014. С. 42–63.

2. Чезари Л. *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Мир, 1964.

3. Худякова П. А. *Об обобщённом кинематическом подобии матричнозначных функций с вещественным параметром-множителем* // Матер. Междунар. мат. конф. “Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”. Минск, 7–10 декабря 2015 г.: в 2 ч. Ч. 1. Минск, 2015. С. 48–50.

4. Алдибеков Т. М. *О приводимости и обобщённой приводимости линейных дифференциальных систем с вещественным параметром-множителем* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 4–9.

ПРИМЕР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ЛЯПУНОВСКОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ, НО ПЕРРОНОВСКОЙ И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

А.А. Бондарев

Настоящий доклад посвящён недавно введённому [1] понятию качественной теории дифференциальных уравнений, а именно, *устойчивости по Перрону.* Он является продолжением цикла работ автора [2–4], усиливая их результаты:

1) работа [2] исправляла недостаток, указанный в замечании 4 к теореме 1 [5], но построенная в ней система обладала *ограниченным* на всей полуоси времени (хотя и ненулевым) линейным приближением вдоль нулевого решения;

2) в работе [3] построена система, обладающая теми же свойствами, но уже с *нулевым* линейным приближением;

3) в работе [4] этот результат был ещё более усилен тем, что построенная в ней система обладала как *перроновской*, так и *верхнепредельной полной неустойчивостью* (а значит, и *ляпуновской глобальной неустойчивостью*) и одновременно с этим даже *массивной частной устойчивостью* (в отличие от всех примеров, рассмотренных выше).

Нижеследующее усиление перечисленных результатов состоит в построении системы, обладающей ляпуновской глобальной неустойчивостью, но при этом как *перроновской*, так и *верхнепредельной глобальной устойчивостью.*

Для числа $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $|\cdot|$ рассматриваем дифференциальные системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \equiv (x_1,\ldots,x_n)^T, \tag{1}$$

правые части которых удовлетворяют условиям

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \qquad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

а значит, обеспечивают существование и единственность решений задач Коши и допускают *нулевое* решение.

Теорема. *При $n = 2$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям (2) и*

$$f'_x(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и обладающая следующими двумя свойствами:

1) для всех решений x системы (1) справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0;$$

2) для каждого ненулевого решения x системы (1) существует такой момент $t_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$|x(t_0)| > 1.$$

Таким образом, все решения описанной системы при $t \to +\infty$ стремятся по норме к нулю, но при этом фазовая кривая каждого ненулевого решения хотя бы однажды покидает 1-окрестность начала координат.

Заметим, что полученный результат не распространяется на *автономные* системы, для которых свойства глобальной неустойчивости сразу всех перечисленных типов (и перроновского, и верхнепредельного, и ляпуновского), согласно теореме 5 из работы [6], *неразличимы*.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект 21-8-2-4-1).

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2. Бондарев А. А. *Один пример неустойчивой системы* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899.

3. Бондарев А. А. *Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.

4. Бондарев А. А. *Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 858–859.

5. Сергеев И. Н. *Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.

6. Сергеев И. Н. *Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.

ТОЧНЫЙ БЭРОВСКИЙ КЛАСС АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

А.Н. Ветохин

Пусть (X, d) – компактное метрическое пространство, а $\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2, \dots)$ – последовательность непрерывных отображений из X в X. Для каждого натурального n обозначим через F_n подпоследовательность $(f_n, f_{n+1}, \dots)$ последовательности $\mathcal{F}$. Наряду с исходной метрикой d, определим на X дополнительную систему метрик

$$d_k^{F_n}(x, y) = \max_{0 \leqslant i < k} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)), \quad f^{\circ i} \equiv f_{n+(i-1)} \circ \dots \circ f_{n+0} \circ \mathrm{id}_X, \quad x, y \in X, \quad k, n \in \mathbf{N}.$$

Для всяких $k, n \in \mathbf{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(F_n, \varepsilon, k)$ максимальное число точек в X, попарные $d_k^{F_n}$-расстояния между которыми больше, чем ε. Тогда *топологическая энтропия, верхняя асимптотическая топологическая энтропия* и *нижняя асимптотическая топологическая энтропия* неавтономной динамической системы $\mathcal{F}$ определяют формулами [1]

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{1}{k} \ln N_d(F_1, \varepsilon, k), \qquad (1)$$

$$\overline{h}^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n, \varepsilon, k), \tag{2}$$

$$\underline{h}^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \lim_{\varepsilon\to 0} \underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n, \varepsilon, k). \tag{3}$$

Отметим, что величины (1) и (2) не зависят от выбора метрики, порождающей на X данную топологию, поэтому формулы (1) и (2) корректны.

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и семейству последовательностей непрерывных отображений

$$\mathcal{F}(\mu,\cdot) \equiv (f_1(\mu,\cdot), f_2(\mu,\cdot), \dots), \quad \mu\in\mathcal{M}, \quad f_i : \mathcal{M}\times X \to X, \quad i\in\mathbf{N}, \tag{4}$$

образуем функции

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}(\mu,\cdot)), \tag{5}$$

$$\mu \mapsto \overline{h}^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}(\mu,\cdot)), \tag{6}$$

$$\mu \mapsto \underline{h}^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}(\mu,\cdot)). \tag{7}$$

Для произвольных $\mathcal{M}$, X и семейства стационарных последовательностей (4) функция (5) принадлежит второму классу Бэра [2], а если $\mathcal{M}$, X – множества Кантора на отрезке $[0,1]$, то для некоторого семейства стационарных последовательностей (4) функция (5) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра [3].

Для произвольных $\mathcal{M}$, X и любого семейства (4) функция (5) принадлежит третьему классу Бэра [4], а если X – отрезок прямой и $\mathcal{M}$ – множество иррациональных чисел на отрезке $[0,1]$, то для некоторого семейства (4) функция (5) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра [5]. Аналогичные результаты верны и для функции (6).

Теорема 1. *Для любых $\mathcal{M}$, X и семейства (4) функция* (5) *принадлежит третьему классу Бэра на $\mathcal{M}$.*

Теорема 2. *Если X – канторово совершенное множество, а $\mathcal{M}$ – множество иррациональных чисел на отрезке* $[0,1]$ *со стандартной метрикой, то для некоторого семейства (4) функция* (6) *всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра на $\mathcal{M}$.*

Для функции (7) справедлива

Теорема 3. *Для любых $\mathcal{M}$, X и семейства (4) функция (7) принадлежит второму классу Бэра на $\mathcal{M}$, причём множество точек её полунепрерывности сверху имеет тип G_δ (в случае полноты пространства $\mathcal{M}$ – ещё и всюду плотно в нём).*

Из результата работы [3] получаем

Теорема 4. *Если $\mathcal{M}$ и X – канторовы совершенные множества на отрезке* $[0,1]$ *со стандартной метрикой, то для некоторого семейства (4) функция (7) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на $\mathcal{M}$.*

Литература

1. Kolyada S., Snoha L. *Topological entropy of nonautonomous dynamical systems* // Random & Computational dynamics. 1996. V. 4. № 2&3. P. 205–233.

2. Ветохин А. Н. *Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453.

3. Ветохин А. Н. *Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2016. Т. 2. № 4. С. 44–48.

4. Ветохин А. Н. *Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем* // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 3. С. 341–348.

5. Ветохин А. Н. *О непринадлежности второму бэровскому классу одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 133–136.

О ПОГЛОЩАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

А.С. Войделевич

Согласно определению, решения обыкновенных дифференциальных уравнений с производной Хукухары [1; 2, с. 14] при каждом значении независимой переменной являются компактными выпуклыми множествами. Поэтому исследование свойств решений таких уравнений включает в себя изучение изменения и асимптотического поведения как функций независимой переменной геометрических характеристик множеств, являющихся значениями решений. Так, например, в работе [3] вычислены показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, а в работе [4] дано полное описание линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих многогранники, т.е. таких уравнений, что любое их решение, которое при начальном значении независимой переменной является многогранником, остаётся многогранником и для всех последующих значений. Наконец, в работе [5] получено полное описание линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих свойство решений быть множествами постоянной ширины, т.е. таких уравнений, что любое их решение, которое при начальном значении независимой переменной является множеством постоянной ширины, остаётся множеством постоянной ширины и для всех последующих значений.

Изучению характеристик решений линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары посвящён и настоящий доклад, но, прежде чем сформулировать полученный результат, приведём ряд необходимых определений.

Определение 1. *Суммой Минковского* $Z = X + Y$ двух множеств $X,\ Y \subset \mathbb{R}$ называется множество $Z \overset{\text{def}}{=} \big\{x + y\colon x \in X,\, y \in Y\big\}$.

Определение 2. [1] Множество $Z \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $X = Y + Z$, где $X, Y \subset \mathbb{R}^d$, называется *разностью Хукухары* множеств X, Y и обозначается как $Z = X - Y$.

Через $B \overset{\text{def}}{=} \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| \leqslant 1\big\}$ обозначим замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат. Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ обозначим семейство всех непустых ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{R}$.

Определение 3. *Расстоянием Хаусдорфа* $h(\cdot,\cdot)$ на множестве $\Omega(\mathbb{R}^d)$ называется величина $h(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \inf\big\{r \geqslant 0 : X \subset Y + rB,\, Y \subset X + rB\big\},\ X, Y \in \Omega(\mathbb{R}^d)$.

Совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ обозначим через $K_c(\mathbb{R}^d)$. Согласно теореме Хана пара $\big(K_c(\mathbb{R}^d), h\big)$ – полное метрическое пространство. Через $I \subset \mathbb{R}$ обозначим какой-либо интервал, вообще говоря неограниченный.

Определение 4. [1] Отображение $X\colon I \to K_c(\mathbb{R})$ называется *дифференцируемым по Хукухаре* в точке $t_0 \in I$, если пределы

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \to +0} \frac{X(t_0) - X(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$

существуют и равны между собой. В этом случае общее значение этих пределов, являющееся, очевидно, выпуклым компактом, обозначается через $D_H X(t_0)$ и называется *производной Хукухары* отображения X в точке t_0.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$D_H X = AX, \quad X(t) \in K_c(\mathbb{R}^d), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с постоянной $(d \times d)$-матрицей коэффициентов A. Для произвольного множества $X_0 \in K_c(\mathbb{R})$ через $X(\cdot; X_0)$ обозначим решение уравнения (1) такое, что $X(0;X_0) = X_0$.

Будем говорить, что решение $X(\cdot)$ уравнения (1) *поглощает* его другое решение $Y(\cdot)$, если найдётся такое $T \geqslant 0$, что при всех $t \geqslant T$ верно включение $Y(t) \subset X(t)$. Через $\mathfrak{A}_d$ обозначим множество всех действительных $(d \times d)$-матриц A таких, что для любых векторов $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d$ и неотрицательных чисел $r_1 > r_2 \geqslant 0$ решение $X(\cdot; p_1 + r_1 B)$ уравнения (1) поглощает решение $X(\cdot; p_2 + r_2 B)$. Естественно возникает задача описать множество $\mathfrak{A}_d$.

Лемма. *Если λ – вещественное собственное значение матрицы $A \in \mathfrak{A}_d$, то $\lambda < 0$.*

Из леммы, в частности, следует, что $\mathfrak{A}_d$ состоит из невырожденных матриц.

Теорема. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ – собственные значения невырожденной действительной $(d \times d)$-матрицы A. Тогда из неравенства $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_i$ следует, что $A \in \mathfrak{A}_d$.*

Литература

1. Hukuhara M. *Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe* // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.
2. Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J. *Theory of set differential equations in metric spaces.* London, 2006.
3. Войделевич А.С. *Показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений стационарных линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 572–576.
4. Войделевич А.С. *Стационарные линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие многогранники* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1695–1698.
5. Войделевич А.С. *Линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие свойство постоянства ширины* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 17–22.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НУЛЕВЫМ ПРАВЫМ ВЕРХНИМ БЛОКОМ УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.К. Деменчук

Условия протекания процесса, при выполнении которых колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, в приложениях называют асинхронным режимом [1]. Задача конструирования периодических систем, обладающих асинхронным режимом, поставлена в виде задачи управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) и в некоторых случаях найдено ее решение [2].

Исследуем подобные вопросы в случае почти периодических (по Бору [3]) систем.

Определение 1. Вещественное число λ называется *показателем Фурье* (*частотой*) почти периодической функции $f(t)$, если выполняется условие

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\exp(\lambda t)dt \not\equiv 0.$$

Определение 2. *Модулем* (*частотным модулем*) $\mathrm{Mod}\,(f)$ почти периодической функции $f(t)$ называется наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, содержащая все показатели Фурье этой функции.

Определение 3. Почти периодическое решение некоторой разрешенной относительно производной почти периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется *сильно нерегулярным*, если пересечение частотных модулей решения и её правой части тривиально.

Отметим, что в периодическом случае условие сильной нерегулярности означает несоизмеримость периодов решения и самой системы [4].

Пусть задана линейная система управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad n\geqslant 2, \tag{1}$$

где x – фазовый вектор, $A(t)$ – непрерывная почти периодическая $(n\times n)$-матрица с модулем частот $\mathrm{Mod}\,(A)$, u – управление, B – постоянная $(n\times n)$-матрица. Будем предполагать, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным

$$u = U(t)x$$

с непрерывной почти периодической $(n\times n)$-матрицей $U(t)$, $\mathrm{Mod}\,(U)\subseteq \mathrm{Mod}\,(A)$.

Задача управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) с целевым множеством частот L состоит в следующем: требуется выбрать такую матрицу $U(t)$ (коэффициент обратной связи), чтобы замкнутая этим управлением система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x$$

имела сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$, спектр частот которого содержит заданное подмножество L.

В случае невырожденной матрицы B решение поставленной задачи не вызывает затруднений. Поэтому далее предполагаем, что матрица B имеет неполный ранг, т.е.

$$\mathrm{rank}B = r < n, \tag{2}$$

причем без ограничения общности можно считать, что первые $n-r$ строк этой матрицы нулевые, а остальные строки линейно независимы, т.к. в противном случае этого можно добиться линейным невырожденным стационарным преобразованием фазовых переменных.

Пусть

$$\hat{A} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T A(s)ds$$

среднее значение матрицы коэффициентов $A(t)$. Обозначим через $\hat{A}_{11}$ – левый верхний блок размерности $(n-r)\times(n-r)$ матрицы $\hat{A}$, а через $\hat{A}_{12}$ – ее правый верхний блок размерности $(n-r)\times r$.

Справедлива

Теорема. *Предположим, что выполняется условие (2) и равенство* $\hat{A}_{12} = 0$. *Если для системы (1) разрешима задача управления асинхронным спектром с целевым множеством частот* L, *то матрица* $\hat{A}_{11}$ *имеет* k *пар различных чисто мнимых собственных чисел* $\pm i\lambda$, $\lambda \in L$, *при этом для мощности целевого множества частот имеет место оценка* $|L| \leqslant k$.

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Вермель А. С., Дубошинский Д. Б., Пеннер Д. И. и др. *Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний* // Успехи физич. наук. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 402–406.

2. Деменчук А. К. *Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний* // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42.

3. Левитан Б. М. *Почти периодические функции.* М.: Гостехиздат, 1953.

4. Курцвейль Я, Вейвода О. *О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Чехосл. матем. журнал. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370.

АНТИПЕРРОНОВСКИЙ ЭФФЕКТ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Н.А. Изобов, А.В. Ильин

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и положительными характеристическими показателями $\lambda_2(A) \geqslant \lambda_1(A) > 0$, а также возмущённые системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемыми экспоненциально убывающими $(n \times n)$-возмущениями

$$Q : \|Q(t)\| \leqslant C_Q e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Возникает вопрос о существовании, например, таких двумерной системы (1) и возмущения (3), что возмущённая система (2) имеет нетривиальное решение с отрицательными показателями Ляпунова. Решение этой (первой) задачи может служить предварительным этапом в решении более важной (второй) задачи о существовании нетривиальных решений с отрицательными показателями у нелинейной дифференциальной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

с бесконечно дифференцируемым m-возмущением

$$f(t, y) : \|f(t, y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0,$$

порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне ее в “антиперроновском” случае положительности всех характеристических показателей линейного приближения (1). В силу принципа линейного включения возможное отрицательное решение первой задачи влекло бы такое же решение и второй. Смена же положительных характеристических показателей линейного приближения (1) на отрицательные у решений возмущённой системы (4) являлась бы эффектом, противоположным известному эффекту Перрона [1–5].

Положительному решению первой задачи и посвящено настоящее сообщение.

Теорема. *Для любых параметров* $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0$, $\theta > 1$ *и* $\sigma \in (0, \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2)$ *существуют:*

1) двумерная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$;

2) бесконечно дифференцируемое экспоненциально убывающее возмущение (3) $Q(t)$ *такое, что возмущённая линейная система (2) имеет решение* $y(t)$ *с отрицательным показателем*

$$\lambda_0 = \frac{\sigma\theta - \lambda_1 - \lambda_2}{\theta - 1}.$$

С помощью этой теоремы и её доказательства устанавливается справедливость аналогичного утверждения в n-мерном случае: для любых параметров

$$\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 > 0, \quad \theta > 1, \quad \sigma \in (0, \lambda_1, +\theta^{-1}\lambda_2)$$

существуют линейная система (1) с показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, экспоненциально убывающее возмущение (3) такие, что возмущённая система (2) имеет $n-1$ линейно независимых решений $y_i(t)$ с показателями

$$\lambda[y_i] = \frac{\sigma\theta - \theta\lambda_1 - \lambda_{i+1}}{\theta - 1} < 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 32. H. 5. S. 702–728.

2. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М.; Ижевск, 2006.

3. Изобов Н. А., Ильин А. В. *О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1435–1439.

4. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 463–472.

5. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1590.

ТОЧНЫЙ БОРЕЛЕВСКИЙ КЛАСС МНОЖЕСТВА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А.Ф. Касабуцкий

Для натурального $n \geqslant 2$ через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс n-мерных линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

матрицы коэффициентов $A(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ которых кусочно-непрерывны на временнóй полуоси $\mathbb{R}_+$ и ограничены. Будем отождествлять систему (1) и её матрицу коэффициентов и вследствие этого писать $A \in \mathcal{M}_n$.

Наряду с системой (1) рассмотрим порождённое ею однопараметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = \mu A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

со скалярным параметром-множителем $\mu \in \mathbb{R}$.

В работе [1] дано следующее

Определение. Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и числа $\lambda < 0$ множество $Se_A(\lambda)$ всех тех значений параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при которых старший показатель Ляпунова системы (2) меньше λ, называется *множеством λ-экспоненциальной устойчивости* системы A.

Очевидно, что $Se_A(\lambda_1) \subset Se_A(\lambda_2)$, если $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

Чтобы сформулировать известные свойства множества $Se_A(\lambda)$, введём нижнее $l(A)$ и верхнее $u(A)$ средние значения [2, с. 534] следа матрицы $A(\cdot)$, т.е. величины

$$l(A) = \varliminf_{t\to+\infty} i_A(t) \quad \text{и} \quad u(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} i_A(t),$$

где

$$i_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^{-1} \int\limits_0^t \operatorname{Sp} A(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant 0.$$

В работе [1] доказана

Теорема 1. *Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ при любом $\lambda < 0$ его множество λ-экспоненциальной устойчивости $Se_A(\lambda)$ является F_σ-множеством.*

При этом $Se_A(\lambda) = \varnothing$, если $l(A)\cdot u(A) \leqslant 0$, а $Se_A(\lambda) \subset \big(n\lambda\cdot u^{-1}(A), +\infty\big)$ при $u(A) < 0$ и $Se_A(\lambda) \subset \big(-\infty, n\lambda\cdot l^{-1}(A)\big)$ при $l(A) > 0$.

Оценки нижней при $u(A) < 0$ и верхней при $l(A) > 0$ границ множества λ-экспоненциальной устойчивости $Se_A(\lambda)$, даваемые теоремой 1, являются неулучшаемыми в классе $\mathcal{M}_n$, как показывает пример системы (1) с постоянной матрицей $A(t) = \operatorname{diag}[a,\ldots,a]$, где $a \neq 0$. Тогда $l(A) = u(A) = na$ и для любого $\lambda < 0$, как легко видеть, $Se_A(\lambda) = (\lambda a^{-1}, +\infty)$, если $a < 0$, и $Se_A(\lambda) = (-\infty, \lambda a^{-1})$, если $a > 0$.

Что же касается борелевского типа множества $Se_A(\lambda)$, то до настоящего времени был известен только заметно более слабый по сравнению с утверждением теоремы 1 результат: множество $Se_A(\lambda)$ может быть любым открытым множеством, дополнение которого до содержащей его полуоси, ограничено. Отсюда, в частности, следует существование таких систем $A \in \mathcal{M}_n$, для которых указанные в теореме 1 оценки границ множества $Se_A(\lambda)$ не только точны, но и для которых, в отличие от приведённого выше примера постоянной диагональной матрицы, не обязательно выполняется равенство $l(A) = u(A)$ и множество $Se_A(\lambda)$ является полубесконечным интервалом.

В настоящем докладе показывается, что номер бэровского класса в теореме 1 уменьшить нельзя. Поскольку, как несложно видеть, случаи $l(A) > 0$ и $u(A) < 0$ сводятся один к другому заменой матрицы $A(\cdot)$ на противоположную ей матрицу $-A(\cdot)$, то теорему 2 мы формулируем только для случая $u(A) < 0$.

Теорема 2. *Для каждого натурального $n \geqslant 2$, отрицательных чисел l и u ($l \leqslant u$) существует такое F_σ-множество M, не являющееся множеством нулевого борелевского класса, что $M = Se_A(\lambda)$ для некоторых системы $A \in \mathcal{M}_n$ и числа $\lambda < 0$. При этом выполняются равенства $l(A) = l$ и $u(A) = u$.*

Сформулированная теорема означает, в частности, что множество экспоненциальной устойчивости линейной дифференциальной системы из $\mathcal{M}_n$, $n \geqslant 2$, является в общем случае множеством точного первого борелевского класса.

Литература

1. Касабуцкий А. Ф. *О множествах Лебега показателя экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 58–67.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МИЛЛИОНЩИКОВА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ПАРАМЕТРА

А.В. Липницкий

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{1_μ}$$

с матрицами

$$A_\mu(t) := \begin{cases} d_k(\mu)\,\mathrm{diag}\,[1,-1], & 2k-2 \le t < 2k-1, \\ (\mu + b_k)J, & 2k-1 \le t < 2k, \end{cases} \text{ где } k \in \mathbb{N}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и вещественным параметром μ; условия, которым удовлетворяют числа $b_k \in \mathbb{R}$ и функции $d_k(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, будут указаны ниже.

В работе [1] доказано, что старший показатель Ляпунова системы (1_μ), рассматриваемый как функция параметра μ, положителен на множестве положительной меры Лебега в случае, когда $d_k(\cdot)$ не зависят от μ и выполнено условие $d_k(\mu) \equiv d_k \geqslant d > 0$, $k \in \mathbb{N}$. В доказательстве этого результата существенно используются комплексные матрицы специального вида. В [2] приводится другой способ доказательства теоремы из [1], основанный на применении равенства Парсеваля для тригонометрических сумм.

Пусть $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, – произвольные числа. Положим

$$d_k(\mu) \equiv d(\mu) > 0, \quad b_{2^{n-1}(2k-1)} := a_n, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Обозначим через $X_{A_\mu}(t,s)$, $t, s \geqslant 0$, матрицу Коши системы (1_μ). Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол φ по часовой стрелке обозначим через

$$U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что в случае, когда матрица $A_\mu(\cdot)$ определяется условиями (2), для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $X_{A_\mu}(2^{k+1},0) = U(a_{k+1} - a_k)X^2_{A_\mu}(2^k,0)$.

Системы с коэффициентами, выбранными согласно (2), обладают рядом свойств, позволяющих строить однопараметрические семейства с различными асимптотическими характеристиками. В частности, если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ сходится, то матрица $A_\mu(\cdot)$ есть равномерный по $t \geqslant 0$ предел последовательности периодических матриц. В.М. Миллионщиков использовал такие системы в работах [3, 4] (см. также [5]) для доказательства существования неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

Предложенные в этих работах методы требуют получения оценок собственных значений и векторов матрицы Коши системы (1_μ). Критерий Е. А. Барабанова [6] правильности линейной системы, состоящий в точности её сингулярных показателей, инициировал другой подход, состоящий в применении сингулярного представления матрицы Коши (см. формулу (3_n) ниже).

В работе [2] при выполнении условий (2), в которых $d(\mu) > 2^{20}$, и в случае непрерывной функции $d(\cdot)$ доказано существование такого значения параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при котором соответствующая система (1_μ) неустойчива. В настоящем докладе аналогичный результат получен для любых $d(\mu) > 0$.

Положим $\eta_1(\mu) = e^{d(\mu)}$, $\psi_1(\mu) := 0$. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ определим рекуррентно вещественные числа $\eta_k \geqslant 1$ и ψ_k следующим образом. Обозначим

$$\xi_k := 2\psi_k + a_k + \mu.$$

Поскольку $\eta_k \geqslant 1$ и, следовательно $\operatorname{sh}(2\ln\eta_k) \geqslant 0$, найдутся единственные

$$1 \leqslant \eta_{k+1} \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \varphi_k \in [-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi),$$

такие что выполнены равенства

$$\operatorname{sh}\ln\eta_{k+1} = (\operatorname{sh}(2\ln\eta_k))|\cos\xi_k|,$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_k = (\operatorname{ch}(2\ln\eta_k))\operatorname{ctg}\xi_k, \text{ если } \sin\xi_k \neq 0, \quad \varphi_k = 0 \text{ в случае, когда } \sin\xi_k = 0.$$

Наконец, полагаем $\psi_{k+1} = \psi_k + \varphi_k/2 + \dfrac{\pi}{4}(1 - \operatorname{sgn}\cos\xi_k)$.

Лемма 1. [2] *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (2) имеет место представление*

$$Y_n := X_{A_\mu}(2^n - 1, 0) = U(\psi_n)\begin{pmatrix} \eta_n & 0 \\ 0 & \eta_n^{-1} \end{pmatrix} U(\psi_n). \qquad (3_n)$$

Пусть $E(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ обозначает прямоугольник $\{(x, y) \,|\, \mathfrak{a} \leqslant x \leqslant \mathfrak{b},\ \mathfrak{c} \leqslant y \leqslant \mathfrak{d}\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, где $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c} < \mathfrak{d}$.

Лемма 2. [7] *Пусть $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ и $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ – непрерывные пути в $E(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, удовлетворяющие условиям*

$$h_1(-1) = \mathfrak{a}, \quad h_1(1) = \mathfrak{b}, \quad u_2(-1) = \mathfrak{c}, \quad u_2(1) = \mathfrak{d}.$$

Тогда эти два пути пересекаются, т.е. $h(s) = v(t)$ для некоторых s, t в $[-1, 1]$.

Для любого множества $M \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\mathrm{C}\,(M)$ множество всех непрерывных функций из M в $\mathbb{R}$.

Теорема. *Для любых $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, и любой непрерывной функции $d(\cdot)$ при выполнении условий (2) найдётся $\mu \in \mathbb{R}$ такое, что система (1_μ) неустойчива.*

Для доказательства индукцией по $k \in \mathbb{N}$ устанавливается существование множества $V_k \subset \mathbb{R}$, $\alpha_k < \beta_k \in \mathbb{R}$, биекции $\omega_k(\cdot) : V_k \to \tilde{V}_k := [\alpha_k, \beta_k]$ и функции $\zeta_k(\cdot) : \tilde{V}_k \to \mathbb{R}$ таких, что справедливы сравнение

$$\zeta_k \circ \omega_k(\mu) \equiv (\xi_k(\mu) - a_k)\,(\operatorname{mod}\pi), \quad \mu \in V_k,$$

равенство

$$\zeta_k(\alpha_k) = -\pi + \zeta_k(\beta_k)$$

и включения

$$\zeta_k \in \mathrm{C}\,(\tilde{V}_k), \quad \eta_k \circ \omega_k^{-1} \in \mathrm{C}\,(\tilde{V}_k),$$

а также неравенство

$$\operatorname{sh}\ln\eta_k(\mu) \geqslant \varkappa_k := (\sqrt{2})^{k-1} \min_{\mu\in[0,\pi]} \operatorname{sh} e^{d(\mu)}, \quad \mu \in V_k. \tag{4_k}$$

Тогда в силу леммы 1 для любого $\mu \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} V_k$ справедливы оценки

$$\|X_{A_\mu}(2^n-1,0)\| \overset{(3_n)}{=} \eta_n \overset{(4_n)}{>} \exp(2^{n/2-1}) \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Литература

1. Липницкий А. В. *Оценки снизу старшего характеристического показателя в однопараметрических семействах систем Миллионщикова* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 171–177.

2. Липницкий А. В. *О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова, зависящих от вещественного параметра* // Доклады НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 3. С. 270–277.

3. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 3. С. 391–396.

4. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 11. С. 1979–1983; 1974. Т. 10. № 3. С. 569.

5. Липницкий А. В. *О решении В.М. Миллионщиковым проблемы Еругина* // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1615–1620.

6. Барабанов Е. А. *Сингулярные показатели и критерии правильности линейных дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 147–157.

7. Maehara R. *The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem* // The American Mathematical Monthly. 1984. V. 91. № 10. P. 641—643.

АППРОКСИМАЦИИ СИГМА-ПОКАЗАТЕЛЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗБИЕНИЯ

Е.К. Макаров

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что

$$\|A(t)\| \leqslant M < +\infty \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0.$$

Обозначим матрицу Коши системы (1) через X_A, а ее старший показатель через $\lambda_n(A)$. Вместе с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей возмущений Q такой, что

$$\|Q(t)\| \leqslant N_Q \exp(-\sigma t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\sigma > 0$. Обозначим старший показатель системы (2) через $\lambda_n(A+Q)$.

Пусть $\mathfrak{M}_\sigma(A)$ – множество всех возмущений Q, удовлетворяющих условию (3) и имеющих соответствующую размерность. Любое $Q \in \mathfrak{M}_\sigma$ называется сигма-возмущением, а число $\nabla_\sigma(A) := \sup\big\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}_\sigma(\mathfrak{A})\big\}$ называется [1; 2, с. 214] старшим сигма-показателем системы (1). В [1] доказано, что сигма-показатель может быть вычислен с помощью следующего алгоритма:

$$\nabla_\sigma(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\xi_m(\sigma)}{m},$$
$$\xi_m(\sigma) = \max_{i<m}\big(\ln\|X_A(m,i)\| + \xi_i(\sigma) - \sigma i\big), \quad \xi_1 = 0, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Известно [2, с. 216], что $\nabla_\sigma(A)$ является выпуклой монотонно убывающей функцией на $[0,+\infty[$, причем $\nabla_\sigma(A) = \lambda_n(A)$ для всех $\sigma > \sigma_0(A)$, где $\sigma_0(A) \leqslant 2M$ – некоторое положительное число.

Альтернативное представление для $\xi_m(\sigma)$ предложено в [3]. Пусть $\mathcal{D}(m)$ – множество всех непустых множеств $d \subset \{1,\,\ldots,\,m-1\} \subset \mathbb{N}$. Будем предполагать, что для каждого $d \in \mathcal{D}(m)$ элементы d нумеруются в порядке возрастания, так что $d_1 < d_2 < \cdots < d_s$ и $d = \{d_1,\,d_2,\,\ldots,\,d_s\}$, где $s = |d|$ – это число элементов множества d. Пусть также $\|d\| := d_1 + \ldots + d_s$ для $d \in \mathcal{D}(m)$ и $\|d\| := 0$ для $d = \varnothing$. Кроме того, для удобства мы предполагаем, что $d_0 = 0$ и $d_{s+1} = m$ для каждого $d \in \mathcal{D}_0(m) := \mathcal{D}(m) \cup \{\varnothing\}$. Заметим, что мы не включаем эти дополнительные элементы в множество d. При указанных предположениях определим величину $\Xi(m,d)$ равенством

$$\Xi(m,d) := \sum_{i=0}^{s} \ln\|X_A(d_{i+1},d_i)\|,$$

где $m \in \mathbb{N}$, $d \in \mathcal{D}(m)$ и $s := |d|$. Согласно [3] выполнено равенство

$$\xi_m(\sigma) = \max_{d\in\mathcal{D}_0(m)}\big(\Xi(m,d) - \sigma\|d\|\big),$$

и поэтому

$$\nabla_\sigma(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \max_{d\in\mathcal{D}_0(m)}\big(\Xi(m,d) - \sigma\|d\|\big). \tag{4}$$

Для построения возмущений Q, обеспечивающих значения $\lambda_n(A+Q)$ близкие к $\nabla_\sigma(A)$, полезно знать некоторые (или все) последовательности $d(m) \in \mathcal{D}_0(m)$, $m \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\nabla_\sigma(A) = \lim_{m\to\infty} m^{-1}\big(\Xi(m,d(m)) - \sigma\|d(m)\|\big). \tag{5}$$

Предложение 1. [1; 2, с. 215] *Если $b \in \mathcal{D}_0(m)$ удовлетворяет условию $\xi_m(\sigma) = \Xi(m,b) - \sigma\|b\|$, то для каждого $i \in \{1,\,\ldots,\,s\}$ выполнено неравенство*

$$b_{i+1} - b_i \geqslant \frac{\sigma}{2M} b_i,$$

где $b = \{b_1,\,\ldots,\,b_s\}$, $s = |b|$.

Основываясь на теории характеристических векторов (см. [4]) можно предположить, что некоторую информацию о последовательностях $d(m)$ в (5) можно получить, зная величины угловых коэффициентов опорных прямых к графику $\nabla_\sigma(A)$. Поскольку результатов такого рода пока нет, здесь мы рассматриваем некоторую упрощенную версию задачи. Для этого мы ограничим число точек разбиения d_i в (4) на каждом отрезке $[0,m]$ некоторым числом $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{D}^k(m) \subset \mathcal{D}(m)$, $k \in \mathbb{N}$, – множество всех $d \in \mathcal{D}(m)$ таких, что $|d| \leqslant k$. Положим также $\mathcal{D}_0^k(m) := \mathcal{D}^k(m) \cup \{\varnothing\}$.

Определение 1. Число

$$\nabla_\sigma^k(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \max_{d\in\mathcal{D}()} (\Xi(m,d) - \sigma\|d\|).$$

будем называть *k-точечной аппроксимацией для $\nabla_\sigma(A)$.*

Предложение 2. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:*

1) $\nabla_\sigma(A) \geqslant \nabla_\sigma^k(A) \geqslant \lambda_n(A)$ при всех $\sigma > 0$;

2) $\nabla_\sigma^k(A)$ – выпуклая монотонно убывающая функция на $[0,+\infty[$ такая, что $\nabla_\sigma(A) = \lambda_n(A)$ для всех $\sigma > \sigma_0(A)$;

3) если $b \in \mathcal{D}_0^k(m)$ удовлетворяет условию

$$\Xi(m,b) - \sigma\|b\| = \max_{d\in\mathcal{D}_0^k(m)} \big(\Xi(m,d) - \sigma\|d\|\big), \tag{6}$$

то выполнено неравенство $\sigma\|b\| \leqslant 2Mm$.

Для каждого $\sigma > 0$ обозначим множество всех $b \in \mathcal{D}_0^k(m)$, удовлетворяющих условию (6), через $\mathcal{B}_\sigma^k(m)$. Положим

$$\mathrm{B}_\sigma(A) = \underline{\lim_{m\to\infty}} \min_{b\in\mathcal{B}_\sigma^k(m)} \frac{\|b\|}{m}, \quad \mathrm{T}_\sigma(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \max_{b\in\mathcal{B}_\sigma^k(m)} \frac{\|b\|}{m}.$$

Множество угловых коэффициентов опорных прямых, проведенных к графику некоторой выпуклой функции $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ в точках $\big(s, f(s)\big)$, где $s \in [0,+\infty[$, обозначим через $\mathcal{S}_s(f)$.

Теорема. *Множество $\mathcal{S}_\sigma\big(\nabla_\sigma^k(A)\big)$ при любых $\sigma > 0$ совпадает с отрезком*

$$\big[\mathrm{B}_\sigma(A), \mathrm{T}_\sigma(A)\big].$$

Литература

1. Изобов Н. А. *О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.

2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Минск: БГУ, 2006.

3. Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В. *Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 215–224.

4. Макаров Е. К. *О взаимосвязи между характеристическими функционалами и слабыми характеристическими показателями* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 3. С. 393–399.

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СПЕКТРА ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

С.Н. Попова, М.В. Федорова

Рассмотрим линейную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с вполне ограниченной [1] на $\mathbb{Z}$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) обозначим через $\lambda(A) = \big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big)$. Всюду считаем, что полный спектр показателей Ляпунова этой и каждой рассматриваемой ниже системы n-го порядка принадлежит множеству $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ упорядоченных по неубыванию наборов n чисел. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$y(k+1) = \big(A(k) + Q(k)\big)y(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где матрица возмущений $Q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ также предполагается вполне ограниченной. Для этой системы определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A+Q) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$. Систему (2) отождествим с матрицей возмущений $Q(\cdot)$. Множество всех возмущенных систем вида (2) обозначим через $\mathcal{Q}$. Пусть $\mathcal{Q}_\delta$ – его подмножество, отвечающее возмущениям $Q(\cdot)$, для которых справедлива оценка $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|Q(k)\| < \delta$ с фиксированным $\delta > 0$. Обозначим

$$\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \doteq \big\{\lambda(A+Q)\colon Q(\cdot) \in \mathcal{Q}_\delta\big\}.$$

Кроме того, для произвольного $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big) \doteq \big\{\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}\colon \max_{j=1,\ldots,n} |\mu_j - \lambda_j(A)| < \varepsilon\big\}.$$

Определение 1. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) называется *устойчивым*, если отображение $Q(\cdot) \mapsto \lambda(A+Q)$ непрерывно в точке $Q(k) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$.

Определение 2. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) называется *открытым*, если отображение $Q(\cdot) \mapsto \lambda(A+Q)$ открыто в точке $Q(k) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big) \subset \lambda(\mathcal{Q}_\varepsilon)$.

Систему (1) отождествим с матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Обозначим $A_s(k) \doteq A(k+s)$ – сдвиг $A(\cdot)$ на $s \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(A)$ – замыкание множества $\{A_s(\cdot)\colon s \in \mathbb{Z}\}$ в топологии поточечной сходимости на $\mathbb{Z}$. Метрика в $\mathfrak{R}(A)$ может быть задана равенством

$$\rho(\widetilde{A}, \widehat{A}) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \min\{\|\widetilde{A}(k) - \widehat{A}(k)\|, |k|^{-1}\}.$$

Пространство $(\mathfrak{R}(A), \rho)$ компактно [2]. Оно называется *оболочкой Бебутова* системы $A(\cdot)$.

Каждую функцию $\widehat{A}(\cdot) \in \mathfrak{R}(A)$ отождествим с линейной системой

$$x(k+1) = \widehat{A}(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема. *Если полный спектр показателей Ляпунова системы $A(\cdot)$ устойчив, то каждая система $\widehat{A}(\cdot) \in \mathfrak{R}(A)$ обладает устойчивым и открытым полным спектром показателей Ляпунова.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20–01–00293) и Министерства науки и высшего образования в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010 “Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем”).

Литература

1. Демидович В. Б. *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.

2. Sell G. R. *Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations.* London: Van Nostrand Reinhold Company, 1971.

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ЭФФЕКТА ПЕРРОНА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.В. Равчеев

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами. Обозначим показатели Ляпунова системы (1) через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, а их спектр — через $\Lambda(A) = \big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big)$. Поскольку мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными, их показатели Ляпунова являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, которая наделяется порядковой топологией.

Для данных метрического пространства M и функции $\theta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ рассмотрим класс $\mathcal{Q}^\theta_n[A](M)$ непрерывных по совокупности переменных функций

$$Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n},$$

удовлетворяющих условиям:

1) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| e^{\theta(t)t} < \infty$;

2) для всяких $k = \overline{1,n}$ и $\mu \in M$ выполняется неравенство

$$\lambda_k(A(\cdot) + Q(\cdot,\mu)) \geqslant \lambda_k(A).$$

Отметим, что для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс $\mathcal{Q}^\theta_n[A](M)$ не пуст, поскольку ему заведомо принадлежит матрица $Q \equiv 0$.

Ставится задача полного дескриптивно-множественного описания для каждых $n \geqslant 2$ и метрического пространства M класса

$$\Pi\mathcal{Q}^\theta_n(M) = \big\{\big(\Lambda(A), \Lambda(A+Q)\big) \mid A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n,\ Q \in \mathcal{Q}^\theta_n[A](M)\big\}.$$

Указанную задачу можно рассматривать как обобщение примера Перрона [1, § 1.4] на случай неограниченных коэффициентов.

Будем говорить [2, с. 224], что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $({}^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([r,+\infty]\big)$ луча $[r,+\infty]$ является G_δ-множеством метрического пространства M. В частности, класс $({}^*, G_\delta)$ – подкласс второго класса Бэра [2, с. 248].

Решение поставленной задачи содержит следующая

Теорема. *Для каждых метрического пространства M, натурального числа $n \geqslant 2$ и непрерывной функции $\theta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ пара $\big(l, f\big)$, где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^n$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon M \to \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^n$, принадлежит классу $\Pi\mathcal{Q}^\theta_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$;

2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ *для любого* $\mu \in M$;

3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ *для всех* $\mu \in M$ *и* $i = \overline{1,n}$;

4) для любого $i = \overline{1,n}$ *функция* $f_i(\cdot)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ *принадлежит классу* $(^*, G_\delta)$.

Замечание. Аналог этой теоремы для случая систем с ограниченными коэффициентам установлен в работе [3].

Приведённая теорема показывает, что все теоретически возможные пары спектров исходной и параметрически возмущённой систем (при дополнительном условии, что все показатели возмущённой системы не меньше, чем у исходной) можно получить в классе возмущений, убывающих быстрее всякой экспоненты. Эта ситуация является специфичной для класса систем с неограниченными коэффициентами, т.к. показатели Ляпунова систем с ограниченными коэффициентами инвариантны относительно возмущений, убывающих быстрее любой экспоненты [1, § 8.1].

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

2. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.–Л.: ОНТИ, 1937.

3. Барабанов Е. А., Быков В. В. *Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности* // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43.

МАССИВНЫЕ И ПОЧТИ МАССИВНЫЕ СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАЗНЫХ ТИПОВ

И.Н. Сергеев

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^\varkappa$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \tag{1}$$

Через S_* и S_δ будем обозначать множества всех непродолжаемых ненулевых решений x системы (1) и, соответственно, тех из них, что удовлетворяют начальному условию

$$|x(0)| < \delta.$$

Определение 1. [1, 2] Будем говорить, что система (1) обладает *перроновской* или, соответственно, *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{2}$$

молчаливо предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}^+$;

2) *полной* (или *глобальной*) *неустойчивостью*, если для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ (или $x \in S_*$) не удовлетворяет требованию (2);

3) *асимптотической* (или *глобальной*) *устойчивостью*, если при $\varepsilon = 0$ для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ (или $x \in S_*$) удовлетворяет требованию (2).

Для определения аналогичных свойств *ляпуновского* типа [3, гл. II, § 1] системы (1) нужно:

4) в пп. 1 и 2 заменить требование (2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

а в п. 3 в дополнение к соответствующему верхнепредельному свойству потребовать наличие у системы (1) ляпуновской устойчивости.

Определение 2. [4, 5] Все перечисленные в определении 1 ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства системы (1) назовём *массивными*: при их описании сразу на все решения $x \in S$, где $S = S_\delta, S_*$, накладывается определённое условие – требование (2), (3) или его отрицание. Каждому массивному свойству из определения 1 поставим в соответствие его *почти массивный* аналог, а именно: *почти устойчивость*, *почти полная* (*почти глобальная*) *неустойчивость* и *почти асимптотическая* (*почти глобальная*) *устойчивость*, — в описании которых соответствующее условие накладывается уже не на все решения $x \in S$, а только на те, начальные значения которых не принадлежат некоторому множеству, называемому *множеством вырождения*, нулевой меры Лебега и первой категории Бэра (представимому в виде счётного объединения нигде не плотных множеств).

Замечание. Свойства системы (1), противоположные массивным свойствам из определения 2, естественно называть *точечными*: в них, напротив, невыполнение определённого условия требуется хотя бы от одного решения $x \in S$. Однако и они могут носить массивный характер, например [6]: существует система (1), ляпуновски вполне неустойчивая, но обладающая перроновской и верхнепредельной массивной, хотя и частной устойчивостью, т.е. при некотором $\delta > 0$ все её решения $x \in S = S_* \setminus S_\delta$ сходятся к нулю на бесконечности.

Свойства ляпуновской устойчивости и ляпуновской почти устойчивости в действительности оказываются неразличимыми между собой, о чём и говорит

Теорема 1. *Если система (1) ляпуновски почти устойчива, то она и ляпуновски устойчива.*

Если ляпуновскую асимптотическую (или глобальную) устойчивость, означающую одновременное выполнение двух условий: ляпуновской устойчивости и верхнепредельной асимптотической (или, соответственно, глобальной) устойчивости, — ослабить до ляпуновской почти асимптотической (или почти глобальной) устойчивости, то первого условия, а именно, ляпуновской устойчивости, это ослабление не коснётся, т.е. справедлива

Теорема 2. *Если система (1) ляпуновски почти асимптотически или почти глобально устойчива, то она и ляпуновски устойчива.*

Логическая иерархия, действующая между массивными свойствами, не только полностью распространяется на их почти массивные аналоги, но и более того, справедливы

Теорема 3. *Если для каких-либо двух массивных свойств имеет место импликация, то она имеет место и для их почти массивных аналогов.*

Теорема 4. *Если какие-либо два массивных свойства несовместны, то несовместны и их почти массивные аналоги.*

Приведённый в теореме 1 пример массивного свойства, неразличимого со своим почти массивным аналогом, оказывается уникальным в том смысле, который разъясняют

Теорема 5. *При $n = 2$ существует автономная линейная диагональная система (1), не обладающая ни ляпуновской, ни перроновской, ни верхнепредельной полной неусточивостью, но почти глобально неустойчивая и ляпуновски, и перроновски, и верхнепредельно.*

Теорема 6. *При $n = 2$ существует автономная система (1), не устойчивая ни перроновски, ни верхнепредельно, но почти глобально устойчивая и перроновски, и* *верхнепредельно.*

Теорема 7. *При $n = 2$ существует автономная система (1), не обладающая ляпуновской асимптотической устойчивостью, но ляпуновски почти глобально устойчивая.*

Заметим, что теорема 7 распространяет на ляпуновские свойства утверждение теоремы 5 в максимально возможной степени общности — ровно в той, в какой оно не противоречит теореме 1. Множества вырождения почти массивных свойств в примерах систем из теорем 5–7 можно выбрать совпадающими с одной из координатных осей или полуосей.

Согласно теореме 1, добавка «почти» применительно к ляпуновской устойчивости роли не играет. В одномерном же случае она не работает вообще, как показывает

Теорема 8. *При $n = 1$ для любой системы (1) любое массивное свойство неразличимо с его почти массивным аналогом.*

Глобальная устойчивость любого типа абсолютно чувствительна к самому незначительному сужению фазовой области — выкалыванию одной ненулевой точки, о чём и говорит

Теорема 9. *Любая система (1), обладающая какой-либо глобальной устойчивостью, перестаёт быть таковой при удалении из её фазовой области любой ненулевой точки.*

В автономном же случае теорема 9 распространяется и на почти глобальную устойчивость — в том смысле, который подразумевает

Теорема 10. *Любая автономная система (1), обладающая какой-либо почти глобальной устойчивостью, перестаёт быть таковой при удалении из её фазовой области любой кривой, трансверсальной к векторному полю этой системы хотя бы в одной точке.*

Известно [7], что полная ляпуновская неустойчивость автономной системы влечёт за собой её полную, и даже глобальную перроновскую (а тем более верхнепредельную) неустойчивость. Однако для тех же свойств с добавкой «почти» аналогичная импликация в автономном случае уже не действует, что и подтверждает

Теорема 11. [7] *При $n = 2$ существует автономная система (1), обладающая перроновской устойчивостью, даже почти глобальной, но ляпуновской и верхнепредельной неустойчивостью, даже почти глобальной, причём множество вырождения всех её почти массивных свойств представляет собой луч, выходящий из нуля и заполненный неподвижными точками, а для любого решения $x \in S_*$, начинающемся не на этом луче, выполнены соотношения*

$$0 = \varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| < \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty. \tag{4}$$

Если в формулировке теоремы 11 отменить последнее из требований (4), то в том же примере можно снять добавку «почти» и с перроновской глобальной устойчивости, т.е. верна

Теорема 12. *При $n = 2$ существует автономная система (1), обладающая перроновской глобальной устойчивостью, но ляпуновской и верхнепредельной неустойчивостью, даже почти глобальной, причём множество её вырождения представляет собой окружность, проходящую через нуль.*

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2. Сергеев И. Н. *Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

3. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

4. Сергеев И. Н. *Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.

5. Сергеев И. Н. *Особенности почти массивных свойств устойчивости и неустойчивости одномерных и автономных дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 6.

6. Бондарев А. А. *Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 858–859.

7. Сергеев И. Н. *Некоторые особенности перроновских и ляпуновских свойств устойчивости автономных систем* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 830–831.

ON SOME METHODS FOR STUDYING QUALITATIVE AND ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS TO HIGHER-ORDER QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

I.V. Astashova

For the equation

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)} = p(x)|y|^k \operatorname{sgn} y \,, \tag{1}$$

where $k > 1$, $n \geqslant 2$, the functions p, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ are continuous for $x \geqslant 0$, we discuss some methods for studying qualitative and asymptotic properties of its solutions. (See, for example, [1–6]).

Theorem 1. *If the continuous functions $a_0, \ldots, a_{n-1}$ and p satisfy the conditions*

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-j-1} |a_j(x)|\, dx < \infty \quad \textit{for all} \quad j \in \{0, \ldots, n-1\} \tag{2}$$

and, for some integer number $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, the condition

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-1+(k-1)m}\, |p(x)|\, dx < \infty, \tag{3}$$

then for any $C \neq 0$ there exists a solution y to equation (1) satisfying, as $x \to \infty$,

$$y^{(j)}(x) \sim \frac{C\, m!\, x^{m-j}}{(m-j)!} \quad \textit{for all } j \in \{0, \ldots, m\},$$

$$y^{(j)}(x) = o\left(x^{m-j}\right) \ \textit{and} \int^{\infty} s^{j-m-1} \left|y^{(j)}(s)\right| ds < \infty \quad \textit{for all } j \in \{m+1, \ldots, n-1\}.$$

Sketch of the proof. To prove this theorem, we use a factorisation of the linear differential operator producing the left-hand side of (1). We use [7, Chap.1, Lemma 3.1, Lemma 3.2] and the following lemmas.

Lemma 1. *If continuous functions a_j satisfy inequalities (2), then for any $h \neq 0$ the equation*

$$y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)}(x) = 0$$

has a $\mathcal{C}^n$ solution $y(x)$ such that

$$\begin{aligned} &y(x) \to h && \text{as } x \to \infty, \\ &x^j y^{(j)}(x) \to 0 && \text{as } x \to \infty, \quad j = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty x^{j-1} \left| y^{(j)}(x) \right| dx < \infty, \quad j = 1, \dots, n.$$

Lemma 2. *Any linear differential operator*

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) \frac{d^j}{dx^j},$$

where all continuous functions a_j satisfy (2), can be represented in a neighborhood of $+\infty$ as the composition operator

$$L = b_0 B_1 \circ \dots \circ B_n,$$

where all B_j, $j = 1, \dots, n$, are the first-order operators $u \mapsto \dfrac{d}{dx}(b_j u)$ and each b_j, $j = 0, \dots, n$, is a $\mathcal{C}^j$ function satisfying at infinity

(i) $b_j(x) \to 1$,

(ii) $x^i b_j^{(i)}(x) \to 0$ *for all* $i \in \{1, \dots, j-1\}$,

(iii) $\int_{x_0}^\infty x^{i-1} \left| b_j^{(i)}(x) \right| dx < \infty$ *for all* $i \in \{1, \dots, j\}$ *and some* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Remark 1. Note, that the first statement of this theorem even in a more general case ($k > 0$ instead of $k > 1$) follows from [4, Corollary 8.2] obtained by a quite different method.

Remark 2. In [6], under conditions (2) and more strong than (3) condition

$$\int_0^\infty x^{(n-1)(k+1)} |p(x)| \, dx < \infty,$$

a more strong result is obtained: it is proved that for any $C_1, \dots, C_{n-1}$ there exists a solution $y(x)$ to equation (1) such that

$$u(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j \xi_j(x) + o(1), \quad x \to \infty,$$

where the functions ξ_j form a fundamental system of solutions to equation (1) with $p = 0$, and

$$\xi_j = \frac{x^j}{j!}(1 + o(1)), \quad x \to \infty.$$

Remark 3. In [5], by the same method of a suitable representation for the linear differential operator, under some conditions on a_j, $j = 0, \ldots, n-1$, a criterion is obtained for equation (1) to have a solution equivalent at infinity to any non-zero constant, and an oscillatory criterion was proved.

Aknowledgement. The work is partially supported by RSF (Project 20-11-20272).

Refrences

1. Sobol I. M. *On asymptotic behavior of solutions to linear differential equations* // Dokl. Akad. Nauk. 1948. V. LXI. № 2. P. 219–222.

2. Kondratiev V. A. *On the oscillation of solutions to the equation* $y^n + p(x)y = 0$ // Trudy MMO. 1961. V. 10. P. 419–436.

3. Kiguradze I. T. *On the oscillation of solutions to the equation* $d^m/dt^m + a(t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0$ // Sb. Math. 1964. V. 65. № 2. P. 172–187.

4. Kiguradze I. T., Chanturia T. A. *Asymptotic properties of solutions to nonautonomous ordinary differential equations.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1993.

5. Astashova I. V. *On existence of non-oscillatory solutions to quasi-linear differential equations* // Georgian Math. J. 2007. V. 14. P. 223–238.

6. Astashova I. V. *On the asymptotic behavior at the infinity of solutions to quasi-linear differential equations* // Math. Bohem. 2010. № 135. P. 373–382 .

7. Astashova I. V. *Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations (in Russian)*, in: I. V. Astashova (ed.), *Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition.* Moscow: UNITY-DANA, 2012. P. 22–290.

A FORMULA FOR THE BOHL EXPONENT OF DISCRETE TIME-VARYING SYSTEMS

A. Czornik, M. Niezabitowski

It is known that the stability of linear time-varying systems is not determined by the position of the spectra of the coefficient matrices. There are examples of continuous-time systems, the coefficients of which have spectra lying in the left half-plane, and these systems are not stable, and conversely all matrices of a stable system may have spectra of the coefficients lying in the right half-plane (see e.g. [6], p. 257). Similarly, one can give examples of stable, asymptotically stable, and even uniformly exponentially stable discrete-time systems with time-varying coefficients, whose coefficient matrices have eigenvalues outside the unit circle, as well as unstable systems with matrices which all eigenvalues lying inside the unit circle. However, if the coefficient matrices of a discrete time-varying system have spectra in the unit circle, stability can be guaranteed by a sufficiently slow variation of the coefficients. This is the basic idea behind the so-called freezing method that was, for discrete-time systems, for the first time described in [2]. A comprehensive description of the results obtained with this technique is provided in Section 10.1 of [4] (see also [3], [5] and the references therein).

Uniform exponential stability of a linear system is characterized by the Bohl exponent. A system is uniformly asymptotically stable if and only if the Bohl exponent is negative ([6], Theorem 3.3.15). The above-mentioned lack of dependence between the spectra of the coefficients and the stability causes that in general it is not possible to give the formula for the Bohl exponent expressed by the eigenvalues of the coefficients. However, as noted by V. M. Millionschikov in [8] and by J. Daleckii and M.G. Krein in the monograph [1, p. 200], such a formula can be given for continuous-time systems with weak variation by Persidskii (see also [7], Section 3.6). The main result of this note is to provide such a formula for discrete systems. On the basis of this formula, we will obtain the necessary and sufficient conditions for uniform exponential stability expressed by the eigenvalues of the matrix of coefficients.

The next theorem contains the main result of this note.

Theorem. *Suppose that for system*

$$x(n+1) = A(n)x(n), \ \ n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

where $A = (A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *is a sequence of invertible* d *by* d *matrices such that*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \max\left\{\|A(n)\|, \left\|A^{-1}(n)\right\|\right\} < \infty$$

we have

$$\lim_{n\to\infty} \|A(n+1) - A(n)\| = 0,$$

then

$$\Omega(A) := \limsup_{m,n-m\to\infty} \frac{1}{n-m} \ln \|\Phi_A(n,m)\| = \limsup_{n\to\infty} \ln \lambda\left(A\left(n\right)\right),$$

where $\left(\Phi_A\left(n,m\right)\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$ *the transition matrix of system (1) and* $\lambda\left(A\right)$ *the greatest absolute value of the eigenvalues of matrix* A. *In particular system (1) is uniformly asymptotically stable if and only if* $\limsup\limits_{n\to\infty} \ln \lambda\left(A\left(n\right)\right) < 0$.

Aknowledgement. The research was financed by the National Science Centre in Poland granted according to decision DEC-2017/25/B/ST7/02888.

References

1. Daleckii J., Krein M. G. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space* // Am. Math. Soc., Providence.

2. Desoer C. *Slowly varying discrete system* $x_i + 1 = a_i x_i$ // Electronics Letters. 1970. V. 6(11). P. 339–340.

3. Gao X., Liberzon D., Liu J., Başar T. *Unified stability criteria for slowly time-varying and switched linear systems* // Automatica. 2018. V. 96. P. 110–120.

4. Gil' M. I. *Difference Equations in Normed Spaces. Stability and Oscillations.* North-Holland, Mathematics Studies; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands. 2007. V. 206.

5. Hill A. T., Ilchman A. *Exponential stability of time-varying linear systems* // IMA Journal of Numerical Analysis. 2011. V. 31. P. 865–885.

6. Hinrichsen D., Prichard A. J. *Mathematical systems theory* I. V. 48 of texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

7. Izobov N. A. *Lyapunov Exponents and Stability.* Cambridge Scientific Publishers, 2012.

8. Millionschikov V. M. *On the spectral theory of nonautonomous linear systems of differential equations* // Tr. Mosk. Mat. Obs. 1968. V. 18. P. 147–186.

NON-AUTONOMOUS SYSTEMS AND TIME-SCALE DYNAMICS: STABILITY AND SHADOWING

S.G. Kryzhevich

We consider a system on a time scale

$$x^{\Delta} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

where the time scale $\mathbb{T}$ is an unbounded closed subset of $\mathbb{R}$ while the derivative Δ is defined as follows.

Given $t \in \mathbb{T}$ we set $t^+ = \inf\{\tau \in \mathbb{T} : \tau > t\}$. Then

$$x^\Delta(t) = \frac{x(t^+) - x(t)}{t^+ - t} \quad \text{if} \qquad t^+ > t$$

and

$$x^\Delta(t) = \lim_{\mathbb{T} \ni \tau \to t+0} \frac{x(\tau) - x(t)}{\tau - t} \qquad \text{if} \quad t^+ = t.$$

Theory of time-scale dynamical systems is quite well-developed, see [1] and references therein. This is an effective approach to study numerical methods of non-uniform steps or systems with strong nonlinearities.

Definition. We say that the system (1) is *structurally stable* if all solutions are unique and for any $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that for any $g(t,x) : |g(t,x)| < \delta,\ |g'_x(t,x)| < \delta$ and any $t_0 \in \mathbb{T}$ there is a homeomorphism h of the space $\mathbb{R}^n$ such that

$$|\varphi_f(t, x_0) - \varphi_{f+g}(t, h(x_0))| < \varepsilon$$

for any $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{T}$. Here $\varphi_f(t, x_0)$ and $\varphi_{f+g}(x_0)$ are solutions of systems (1) and $x^\Delta = f(t,x) + g(t,x)$ with initial conditions $x(t_0) = x_0$.

For systems of ordinary differential equations, conditions for global structural stability were obtained in [1] and [2]. It was proved that a system is structurally stable if its linearizations are uniformly hyperbolic on families of segments.

We formulate and prove an analog of this statement for time scale systems. Although the result is very similar to that for ordinary differential equations, the proof for the time scale case is significantly different. Besides, the derivatives of f and the so-called graininess function μ (the size of 'holes' of the time scale) must meet some specific requirements.

To prove the claimed result we need to use specific approaches of time scale systems theory [3]. Remarkably, the classical results for structural stability of autonomous systems of ODEs, obtained by C. Robinson [4], are, in general, non-applicable for systems on time scales (even for the autonomous ones).

The problems of shadowing and inverse shadowing for the considered system and related results for convergence of numerical methods will also be studied.

Acknowledgement. The research was supported by Gdańsk University of Technology by the DEC 14/2021/IDUB/I.1 grant under the Nobelium – 'Excellence Initiative –Research University' program.

Refrences

1. Kryzhevich S. G., Pliss V. A. *Structural stability of nonautonomous systems* // Diff. equations. 2003. V. 39. № 10. P. 1395–1403.

2. Pliss V. A. *Relation between various conditions of structural stability* // Diff. equations. 1981. V. 17. № 5. P. 828–835.

3. Bohner M., Martynyuk A. A. *Elements of stability theory of A. M. Liapunov for dynamic equations on time scales* // Nonlinear Dyn. Syst. Theory. 2007. V. 7. № 3. P. 225–251.

4. Robinson C. *Structural stability of vector fields* // Ann. of Math. 1974. V. 99. № 3. P. 447–493.

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ИЗОХРОННЫХ И СИЛЬНО ИЗОХРОННЫХ ФОКУСАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

В.В. Амелькин

Рассмотрим вещественную полиномиальную дифференциальную систему Льенара

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + A(x) - B(x)y \tag{1}$$

в предположении, что полиномы $A(x)$ и $B(x)$ задаются равенствами

$$A(x) = \sum_{k=2}^{n} A_k x^k, \quad B(x) = \sum_{j=1}^{r} B_j x^j, \quad A_n \neq 0, \quad B(x) \not\equiv 0,$$

где $n \geqslant 3$ – нечетное число, $r \leqslant n-1$.

Как хорошо известно, особая точка $O(0,0)$ системы (1) является либо центром, либо фокусом.

Пусть OA – луч (с началом в точке $O(0,0)$), составляющий с положительной полуосью оси абсцисс декартовой прямоугольной системы координат xOy угол $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тогда центр или фокус $O(0,0)$ системы (1) называют *изохронным*, если все изображающие точки, начиная двигаться по траекториям центра или фокуса системы (1) с некоторого луча OA в момент времени $t = t_0$, совершают полный оборот вокруг начала за одно и то же время $T = 2\pi$. Луч OA из приведённого определения изохронности будем называть *лучом-изохроной*.

Пусть, далее, y^+ и y^- – соответственно положительная и отрицательная полуоси оси Oy системы координат xOy. Особая точка $O(0,0)$ системы (1) называется *сильно изохронной*, если она изохронная и если дополнительно изображающая точка, выходящая из точки полуоси y^+, пересечет полуось y^- в первый раз через время π.

Отметим, что поскольку полиномиальная система Льенара (1) в общем случае приводится обратимой полиномиальной заменой координат

$$u = x, \quad v = y - x\Phi(x), \tag{2}$$

где $\Phi(x) = x^{-2}\int_0^x sB(s)\,ds$, к системе

$$\dot{u} = -v - u\Phi(u), \quad \dot{v} = u - v\Phi(u) + A(u) - u\Phi^2(u),$$

приходим к выводу, что начало координат $O(0,0)$, как особая точка системы (1), является изохронной (причем единственной) при условии $A(x) = x\Phi^2(x)$.

А так как полуоси y^+ и y^- являются лучами-изохронами в случае фокуса $O(0,0)$ системы (1) [1], то исследуя систему (1) в случае фокуса во всей фазовой плоскости (т.е. глобально), получаем на основании диффеоморфизма (2) и [1], что имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы была изохронным, а значит, и сильно изохронным фокусом, необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$A_2 = 0, \quad A_k = \sum_{r=1}^{k-2} \frac{B_r}{r+2} \cdot \frac{B_{k-r-1}}{k-r+1}, \quad k = \overline{3, n}, \tag{3}$$

в которых по крайней мере один из коэффициентов B_{2s}, $s = \overline{1, (n-1)/2}$, полинома $B(x)$ при заданном нечетном $n \geqslant 5$ отличен от нуля.

Теорема 2. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (1) была изохронным, а значит, и сильно изохронным фокусом, необходимо и достаточно, чтобы диффеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$*

$$u = x, \quad v = y - x \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{B_k}{k+2}\, x^k,$$

где по крайней мере один из коэффициентов B_{2s}, $s = \overline{1,\ (n-1)/2}$, полинома $B(x)$ при заданном нечетном $n \geqslant 5$ отличен от нуля, переводил систему (1) в систему

$$\dot u = -v - u \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{B_k}{k+2}\, u^k, \quad \dot v = u - v \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{B_k}{k+2}\, u^k.$$

Пример. Система Льенара

$$\dot x = -y, \quad \dot y = x + x^3 + 2x^4 + x^5 + 2x^7 + 2x^8 + x^{11} - (3x + 4x^2 + 7x^5)y$$

имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный, а значит, и сильно изохронный фокус, поскольку равенства (3) принимают вид

$$A_2 = 0, \quad A_3 = (B_1/3)^2, \quad A_4 = 2(B_1/3)(B_2/4), \quad A_5 = (B_2/4)^2,$$

$$A_7 = 2(B_1/3)(B_5/7), \quad A_8 = 2(B_2/4)(B_5/7), \quad A_{11} = (B_5/7)^2.$$

Диффеоморфизм же плоскости $\mathbb{R}^2$

$$u = x, \;\; v = y - x^2 - x^3 - x^6 \quad (x = u, \;\; y = v + u^2 + u^3 + u^6)$$

переводит рассматриваемую систему в систему

$$\dot u = -v - u\,(u + u^2 + u^5), \quad \dot v = u - v\,(u + u^2 + u^5).$$

Литература

1. Амелькин В. В. *Изохронные и сильно изохронные фокусы полиномиальных систем Льенара* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 3–10.

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ ПОВЕДЕНИЯМИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАДИЕНТНО ПОДОБНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ ОСНОВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ С НЕКОТОРЫМИ СВОЙСТВАМИ ЕГО КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Ш.Ш. Бабаджанов

В банаховом пространстве

$$E = C^1_* = \big\{x \in C^1[0,1] : x(0) = x(1) = 0\big\}$$

с нормой $\|x\| = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1} |x(s)| + \max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1} |x'(s)|$, которое было введено в работе [1], рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -G(x), \tag{1}$$

где $G(x)$ построенное в этой работе и определенное равенством

$$G(x) = \int\limits_0^1 K_0(s,t)\frac{\partial f\big(t,x(t),x'(t)\big)}{\partial x}\,dt + \int\limits_0^1 K_1(s,t)\frac{\partial f\big(t,x(t),x'(t)\big)}{\partial x'}\,dt = \Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x'}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

градиентно подобное отображение для основного функционала вариационного исчисления

$$F(x) = \int\limits_0^1 f\big(s,x(s),x'(s)\big)\,ds. \tag{2}$$

Здесь $\Gamma(a,b) = \int\limits_0^1 K_1(s,t)a(t)\,dt + \int\limits_0^1 K_0(s,t)b(t)\,dt$, $a,b \in C[0,1]$, непрерывно действующий интегральный оператор из $C[0,1]\times C[0,1]$ в C^1_*, где

$$K_0(s,t) = \begin{cases} t(1-s), & \text{если } 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ s(1-t), & \text{если } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \quad \text{и} \quad K_1(s,t) = \begin{cases} 1-s, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ -s, & \text{если } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

Решение $x(t,s) = p\big(t,y(s)\big)$, $0\leqslant s\leqslant 1$, $t\in[0,+\infty)$, удовлетворяет следующим условиям: $x(t,0) = x(t,1) = 0$. При каждом фиксированном t функция $x(t,s)$ будет элементом пространства C^1_*.

Настоящий доклад посвящается связи между поведением решений уравнения (1) при $t\to+\infty$ $(-\infty)$ с различными свойствами критических точек функционала (2).

В дальнейшем будем считать, что для уравнения (1) справедлива локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши, например, выполнены условия:

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \text{по } x \text{ и } y \text{ удовлетворяют локальному условию Липщица}\right\}. \tag{3}$$

В данной работе используется следующее условие компактности.

Множество $M\subset C^1_*$ компактно тогда и только тогда, когда M ограничено в C^1_* и семейство функции $\{u'(s) : u\in M\}$ равностепенно непрерывно.

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3) и у функции* $f(s,x,y)$ *на* $[0,1]\times\mathbb{R}^2$ *существует непрерывная производная* $\dfrac{\partial^2 f(s,x,y)}{\partial y^2}$, *которая является положительной. Пусть для последовательности решений* $x_k(t,s)=p(t,y_k)$, $t_k\leqslant t<T_k$, $k=1,2,\ldots,$ $(T_k<\infty$ *или* $T_k=+\infty)$ *уравнения (1) выполнено условие* $\|x_k(t,s)\|\leqslant R_1$, $t_k\leqslant t<T_k$, $k=1,2,\ldots$. *Тогда*

1) для любого отрезка $[a,b]$, $t_k\leqslant a_k$, $b_k<T_k$, $k\geqslant k_0$ *множество*

$$\{x_k(t,s): a\leqslant t<b,\ k\geqslant k_0\}$$

компактно в C^1_*, *если* $t_k\to-\infty$ *при* $k\to\infty$;

2) множество $\big\{x_k(t,s): t_k\leqslant t<T_k,\ k=1,2,\ldots\big\}$ *компактно в* C^1_*, *если* $t_k\geqslant t_0$, $k=1,2,3,\ldots,$ *и множество начальных значений* $\{x_k(t,s)=y_k(s)\}$, $k=1,2,\ldots,$ *компактно в* C^1_*.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3) и у функции* $f(s,x,y)$ *на* $[0,1]\times\mathbb{R}^2$ *существует непрерывная производная* $\dfrac{\partial^2 f(s,x,y)}{\partial y^2}$, *которая является положительной. Пусть последовательность решений* $\{x_k(t)\}$ *уравнения (1) удовлетворяет условиям* $\|x_k(t_k)\|\leqslant\delta_k$, $\|x_k(0)-x_0\|=r_0$ *и* $\delta_k\leqslant\|x_k(t)-x_0\|\leqslant r_0$ *при* $t_k\leqslant t\leqslant 0$, *где* $\delta_k\to 0$ *при* $k\to\infty$. *Тогда множество значений* $\{x_k(t): t_k\leqslant t\leqslant 0,\ k=1,2,...\}$ *решений* $x_k(t)$ *компактно в* C^1_*.

Теорема 3. *Пусть уравнение (1) имеет решение* $x(t,s)=p\big(t,y(s)\big)$ *такое, что* $\|x(t,s)\|\leqslant R_1$, $t\leqslant 0$. *Тогда множество предельных точек решения* $x(t,s)$ *при* $t\to-\infty$ *является критическими точками функционала (2).*

Теорема 4. *Пусть изолированная критическая точка* x_0 *является локальным минимумом для функционала (1) в* C^1_*. *Тогда стационарное решение* $x(t)=x_0$ *уравнения (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову при* $t\to+\infty$ *и наоборот, если критическая точка* x_0 – *асимптотически устойчива по Ляпунову при* $t\to+\infty$, *то она является изолированной критической точкой и точкой локального минимума функционала (2).*

Теорема 5. *Пусть* $G(0)=0$ *и* $x_0=0$ *является единственной критической точкой функционала (2) в шаре* $\|x\|\leqslant R_1$. *Тогда уравнение (1) не имеет ненулевых решений* $x(t)$, *удовлетворяющих условию* $\|x(t)\|\leqslant R_1$, $t\in\mathbb{R}^1$.

Литература

1. Бабаджанов Ш. Ш. *Градиентно подобное отображение основного функционала вариационного исчисления в банаховом пространстве* C^1_* // Интеллектуально-информационные технологии и интеллектуальный бизнес (ИНФОС-2021). Материалы Двенадцатой Международной научно-технической конференции (29–30 июня 2021). Вологда, 2021. С. 188–192.

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

М.С. Белокурский

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x}=X(t,x),\quad t\in\mathbb{R},\quad x=(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывной по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемой по x правой частью. Пусть $\varphi(t;\tau,x)$ – общее решение в форме Коши системы (1). Пусть I_x – максимальный симметричный относительно нуля интервал существования решения $\varphi(t;0,x)$. Обозначим $D(X) := \big\{\big(t,\varphi(t;0,x)\big) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in I_x,\ x \in \mathbb{R}^n\big\}$. Из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и определения множества $D(X)$ следует, что $D(X)$ – открытая область в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, содержащая гиперплоскость $t=0$. Отражающей функцией Мироненко [1] системы (1) называется вектор-функция $F : D(X) \to \mathbb{R}^n$, действующая по правилу $(t,x) \mapsto \varphi(-t;t,x)$. Таким образом, отражающая функция определяется формулой $F(t,x)=\varphi(-t;t,x)$.

Вектор-функция $F=F(t,x) : D(X) \to \mathbb{R}^n$ является [2, с. 63] отражающей функцией системы (1), тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений в частных производных $F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0$ и начальному условию

$$F(0,x) \equiv x. \tag{2}$$

Для отражающей функции системы (1) справедливо [2, с. 63] тождество

$$F(-t,F(t,x)) \overset{t,x}{\equiv} x, \tag{3}$$

из которого следует, что не всякая вектор-функция может быть отражающей функцией. Поэтому актуальной задачей является нахождение функций, удовлетворяющих условию (3), т. е. тех функций, которые могут быть использованы для изучения дифференциальных уравнений методом отражающей функции.

Рассмотрим функцию вида

$$F(t,x) = \frac{f_0(t)+f_1(t)x}{g_0(t)+g_1(t)x}. \tag{4}$$

Коэффициент $g_0(0) \neq 0$, т. к. в противном случае функция (4) не удовлетворяет условию (2). Разделив числитель и знаменатель функции (4) на $g_0(t)$, получаем функцию вида

$$F(t,x) = \frac{a_0(t)+a_1(t)x}{1+b_1(t)x}, \tag{5}$$

где $a_0(t) = \dfrac{f_0(t)}{g_0(t)},\ a_1(t) = \dfrac{f_1(t)}{g_0(t)},\ b_1(t) = \dfrac{g_1(t)}{g_0(t)}.$

Теорема 1. *Для того чтобы функция (5) была отражающей функцией необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$F(t,x) = \frac{\alpha(t)e^{\beta(t)}+e^{2\beta(t)}x}{1+\gamma(t)e^{\beta(t)}x}, \tag{6}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ – нечетные дифференцируемые функции.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t,x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения (7) непрерывна по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по x. Если уравнение (7) имеет отражающую функцию (6), то оператор сдвига вдоль решений уравнения (7) на отрезке $[-\omega;\omega]$ задается формулой*

$$T : x \mapsto \frac{-\alpha(\omega)e^{-\beta(\omega)}+e^{-2\beta(\omega)}x}{1-\gamma(\omega)e^{-\beta(\omega)}x}.$$

Литература

1. Мироненко В. И. *Классы систем с совпадающими отражающими функциями* // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 12. С. 2173–2176.

2. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004.

3. Белокурский М. С. *Дробно-линейная отражающая функция* // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2021. № 6(129). С. 84–87.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

А.Н. Бондарев

Исследуется задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)XC_1(t) + XB_1(t) + \lambda^2 C_2(t)XB_2(t) + F(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i, \lambda) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, A, B_j, C_j, F – непрерывные по $t \in I$ матрицы-функции соответствующих размерностей, M_i – заданные постоянные $(n \times n)$-матрицы; $\lambda \in \mathbb{R}$, $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $j = 1, 2$.

В предлагаемой работе, являющейся обобщением и развитием [1, 2], по методу [3, гл. I] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), алгоритм построения решения и дана оценка области его возможного расположения. Исследование задачи (1), (2) выполнено в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in I} \|X(t,\lambda)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матрицы в этой алгебре.

Примем следующие обозначения:

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad v_i = \|V_i\|, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \alpha = \max_{t\in I} \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_{t\in I} \|B_2(t)\|,$$

$$c_j = \max_{t\in I} \|C_j(t)\|, \quad h = \max_{t\in I} \|F(t)\|, \quad \mu_1 = \max_{t\in I} \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_{t\in I} \|V^{-1}(t)\|,$$

$$q(\varepsilon) = q_1\varepsilon^2 + q_2\varepsilon, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h \sum_{i=1}^{k} m_i v_i,$$

где $q_1 = \gamma\mu_1\mu_2\beta_2 c_2\omega \sum\limits_{i=1}^{k} m_i v_i$, $q_2 = \gamma\mu_1\mu_2\alpha c_1\omega \sum\limits_{i=1}^{k} m_i v_i$, Φ – линейный матричный оператор типа [4], $\Phi Y \equiv \sum\limits_{i=1}^{k} M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dV/dt = VB_1(t)$.

Теорема. *Пусть оператор* Φ *однозначно обратим, при этом* $q(\varepsilon) < 1$. *Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение* $X(t, \lambda)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка* $\|X\|_C \leqslant N/(1 - q(\varepsilon))$.

Вместо задачи (1), (2) рассмотрено эквивалентное ей интегральное уравнение

$$X(t,\lambda) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [\lambda A(\tau)X(\tau)C_1(\tau) + \lambda^2 C_2(\tau)X(\tau)B_2(\tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + F(\tau)]\, V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t), \tag{3}$$

исследование разрешимости которого выполнено с помощью принципа сжимающих отображений (см., например, [5, с. 605]).

Для построения решения предложен алгоритм

$$X_p(t,\lambda) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [\lambda A(\tau)X_{p-1}(\tau,\lambda)C_1(\tau) + \lambda^2 C_2(\tau)X_{p-1}(\tau,\lambda)B_2(\tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + F(\tau)]\, V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t), \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где $X_0(t,\lambda)$ – произвольная непрерывная матричная функция.

Доказано, что последовательность $\{X_s(t,\lambda)\}_0^\infty$, построенная по алгоритму (4), сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (3), при этом получены оценки

$$\|X - X_s\|_C \leqslant \frac{q(\varepsilon)^s}{1-q(\varepsilon)}\|X_1 - X_0\|_C,\ s = 0, 1, 2, \ldots; \quad \|X\|_C \leqslant \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q(\varepsilon)}.$$

Из оценки для $\|X\|_C$ при $X_0 = 0$ следует оценка из теоремы.

Решение интегрального уравнения (3) построено также на основе метода малого параметра Пуанкаре–Ляпунова в виде ряда

$$X(t,\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X_s(t), \tag{5}$$

где

$$X_0(t) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau)V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t),$$

$$X_1(t) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} A(\tau)X_0(\tau)C_1(\tau)V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t),$$

$$X_{p+1}(t) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A(\tau)X_p(\tau)C_1(\tau) + C_2(\tau)X_{p-1}(\tau)B_2(\tau)]\, V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t),$$

$$p = 1, 2, \ldots .$$

Установлено, что ряд (5) сходится равномерно по $t \in I$ при $|\lambda| < 2/(q_2 + \sqrt{q_2^2 + 4q_1})$.

Литература

1. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 776–784.

2. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1992. V. 167. P. 505–515.

5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА-БОГДАНОВА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.Т. Борухов, О.М. Кветко

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -y + P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y), \tag{1}$$

где $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$, $\deg P \geqslant 2$, $\deg Q \geqslant 2$. Напомним, что отличная от константы и достаточно гладкая в некоторой окрестности U точки (0,0) функция $V(x, y)$ назвается *первым интегралом системы* (1), если выполняется условие

$$(\mathfrak{L}V)(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in U.$$

Здесь

$$L := (-y + P)\frac{\partial}{\partial x} + (x + Q)\frac{\partial}{\partial y}$$

– оператор Лиувилля системы (1). Нас интересуют полиномиальные первые интегралы Пуанкаре степени m, т.е. интегралы вида

$$V_m(x, y) = \sum_{k=2}^{m} H_k(x, y), \quad (m < \infty), \tag{2}$$

где $H_2(x, y) = x^2 + y^2$, $H_k(x, y)$ $(k = \overline{3, m})$ – однородные вещественные полиномы степени $\deg H_k = k$, $H_m \neq 0$.

Явные условия существования полиномиальных первых интегралов для квадратичных и кубических систем представлены в работе [1]. В [2] приводятся условия существования полиномиальных первых интегралов для общего класса полиномиальных дифференциальных систем. Однако эти условия сводятся к вычислению рангов матриц больших размерностей.

В данном сообщении рассматривается алгоритм, позволяющий последовательно, полагая $m = 2, 3, \dots$, выявить наличие или отсутствие интегралов вида (2) для заданной системы (1).

Обозначим

$$F_{kl}(x, y) = (Lv_{kl})(x, y),$$

где $v_{kl}(x,y) = x^k y^l$, $k+l \geqslant 3$, и определим подпространство

$$\mathfrak{F}_m = \operatorname{span}\{F_{kl}\}_{3\leqslant k+l\leqslant m} \subset \mathbb{R}[x,y].$$

Лемма. *Система (1) допускает первый полиномиальный интеграл Пуанкаре степени $\leqslant m$ тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$F_{20} + F_{02} \in \mathfrak{F}_m. \tag{3}$$

Задача (3) о принадлежности полинома $F_{20}+F_{02}$ подпространству $\mathfrak{F}_m$ решается с помощью общего алгоритма из [3] построения базиса Ляпунова для фундированного функционала Ляпунова-Богданова. При этом функционал Ляпунова-Богданова λ_m задаётся соотношениями

$$\lambda_m(0) = -\infty, \quad \lambda_m(f) = \operatorname{multideg} f, \quad \forall f \in \mathfrak{F}_m \diagdown \{0\},$$

где мультистепень полинома f определяется тем или иным мономиальным порядком [4, 5].

Приводятся примеры полиномиальных интегралов, полученные с помощью предложенного подхода.

Литература

1. Gine J. *Polynomial first integrals via the Poincare series* // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. V. 184. № 2. P. 428–441.

2. Борухов В. Т., Кветко О. М. *Вложимость нелинейных дифференциальных систем в линейные системы и полиномиальные первые интегралы* // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация. Материалы международной научной конфференции, посвящённой 100-летию со дня рождения академика Е. А. Барбашина, Минск, 24-29 сент. 2018 г. Белорус. гос. ун-т – Минск: БГУ, 2018. С. 81–82.

3. Борухов В. Т., Кветко О. М. *Фундированные функционалы Ляпунова-Богданова* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 31–40.

4. Cox D., Little J., O'Shea *Ideals, Varieties and Algrithms.* Springer-Verlag, 1991.

5. Хованский А. Г., Чулков С. П. *Геометрия полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Приложения к комбинаторике, алгебре и дифференциальным уравнениям.* М.: МЦНМО, 2006.

РАЗРЕШИМОСТЬ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.И. Кашпар

Рассмотрим краевую задачу [1–3]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{F}\left(t, \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \tag{2}$$

где

$$(t, \mathbf{X}) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}_i \in \mathbb{C}\left(I,\, \mathbb{R}^{n\times n}\right), \quad \mathbf{F} \in \mathbb{C}\left(D, \mathbb{R}^{n\times n}\right),$$

$$D = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : t \in I,\ \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1,\ \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\},$$

$$\mathbf{Y} = d\mathbf{X}/dt, \quad I \in [0, \omega], \quad 0 < \tilde{\rho}_i \leqslant \infty \;\; (i = 1, 2),$$

$\mathbf{M}, \mathbf{N}$ — заданные вещественные матрицы. Предположим также, что функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально).

В предлагаемой работе, являющейся обобщением и развитием [1–3], на основе применения метода [4] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и алгоритм построения решения задачи (1), (2).

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{F}\big(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}\big),$$

$$\gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|, \quad \widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad \widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}),$$

$$c_i = \max_t \|\mathbf{C}_i(t)\|, \quad h_1 = \max_t \left\|\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}(t)\right\|, \quad h_2 = \max_t \left\|\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}(t)\right\|,$$

$$\lambda_U = \max_{0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant \omega} \left\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\right\|, \quad \lambda_V = \max_{0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant \omega} \left\|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right\|,$$

$$G = \{(t,\ \mathbf{X},\ \mathbf{Y}) : t \in I,\ \|\mathbf{X}\| \leqslant \rho_1,\ \|\mathbf{Y}\| \leqslant \rho_2\},$$

$$p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^3(L_1 + c_1 + c_2), \quad p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^2(L_1 + c_1 + c_2),$$

$$q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^3 L_2, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^2 L_2,$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

где $t \in I,\ 0 < \rho_i < \tilde{\rho}_i\ (i = 1, 2)$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений

$$d\mathbf{U}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{U} \;\; (\mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n), \quad d\mathbf{V}/dt = \mathbf{V}\mathbf{B}(t) \;\; (\mathbf{V}(0) = \mathbf{E}_m),$$

$\mathbf{E}_k$ – единичная матрица порядка k;

$$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)\big(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})\big)\mathbf{V}(\tau)\mathbf{d}\tau, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) = \mathbf{U}(t)\big(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})\big)\mathbf{V}(t);$$

$\mathbf{\Phi}$ – линейный оператор [1–3],

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau, \quad \mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t);$$

$L_i = L_i(\rho_1, \rho_2)$ – постоянные Липшица для $\mathbf{F}\big(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}\big)$ в области G; $\|\mathbf{X}\|_C = \max_t \|\mathbf{X}(t)\|$ – норма непрерывной матричной функции в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$, $\|\cdot\|$ – определенная норма матрицы в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21]; $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – интегральные операторы, определяемые на основе интегральной задачи, эквивалентной (1),

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \tag{3}$$

Интегральная задача (3) в явном виде дается соотношениями

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M} + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Phi}^{\mathbf{-1}}\big((\mathbf{N} - \mathbf{M})\big)\mathbf{V}(\tau)\mathbf{d}\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^\varphi \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \qquad (4)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t)+$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^t \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t). \qquad (5)$$

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим и выполнены неравенства*

$$p_1\rho_1 + q_1\rho_2 + h_1 \leqslant \rho_1, \quad p_2\rho_1 + q_2\rho_2 + h_2 \leqslant \rho_2, \quad p_1 + q_2 < 1.$$

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в области G*, при этом справедлива оценка* $\mathbf{Z} \leqslant (\mathbf{E}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}$.

Замечание. В случае, когда $\mathbf{A}(t)\equiv 0$, $\mathbf{B}(t)\equiv 0$, $\mathbf{C}_i(t)\equiv 0$, имеет место следствие данной теоремы, из которого при $\rho_2 = 4\rho_1/\omega$ вытекает теорема 4.1 [6, с. 497]. В [1] дано применение полученных результатов к стационарной задаче об определении распределения температуры в круговой (продольно неограниченной) цилиндрической оболочке (стенке).

Для построения решения задачи (1), (2) разработан алгоритм классического типа (см., например, [7, с. 605]), который применительно к операторной системе (3) имеет вид

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{M}+\mathbf{P_{UV}}(t)+\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k), \quad \mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{Q_{UV}}(t)+\mathcal{L}_2(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k), \quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots, \qquad (6)$$

где $\mathbf{X_0}(t), \mathbf{Y}_0(t)$ – произвольные матрицы класса $\mathbb{C}\,(I,\,\mathbb{R}^{n\times n})$, принадлежащие множеству $\tilde{G} = \{(\mathbf{X}(t),\,\mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C \leqslant \rho_1, \|\mathbf{Y}\|_C \leqslant \rho_2\}$.

Алгоритм (6) для интегральной задачи (4), (5) имеет вид

$$\mathbf{X}_{k+1}(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P_{UV}}(t)+$$

$$+\int\limits_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^\varphi \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,\ k=0,1,2,\ldots,$$

$$\mathbf{Y}_{k+1}(t) = \mathbf{Q_{UV}}(t) + \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^t \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t).$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости данного алгоритма, а также получены соответствующие оценки.

Литература

1. Лаптинский В. Н., Кашпар А. И. *Конструктивный анализ краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка.* Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2016. (Препринт / Ин-т технол. металлов Беларуси; № 40).

2. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *О разрешимости задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5—10 сентября 2016 г. Ч. 2. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016. С. 32–33.

3. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Дифференцальные уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 570—583.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.
5. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.
6. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

ВОЗМУЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВАЯ СИСТЕМА С ЕДИНСТВЕННЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ

А.В. Кузьмич

Рассматривалась автономная возмущенная гамильтоновая дифференциальная система на плоскости

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^{2n-1} = P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= -x^{2q-1} + \mu \sum_{i=0}^{n} h_i(x,\mu) y^i = Q(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

зависящая от действительного параметра $\mu \in I \subset \mathbb{R},\ 0 \in I,$ и натуральных параметров $n,\ q.$ Функции $h_i : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R},\ \ i = \overline{0,n},$ непрерывны по двум аргументам и $h_n(x,\mu) \neq 0.$

Для определения числа и расположения предельных циклов в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ применялся обобщенный метод Дюлака [1], который заключается в нахождении функции Дюлака-Черкаса $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$ и числа $k \in \mathbb{R},\ k \neq 0,$ удовлетворяющих неравенству

$$\Phi \equiv k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0\,(<0), \quad (x,y) \in \Omega, \quad X = (P,Q).$$

Для выделения класса систем вида (1), имеющих не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости, функция Ψ применялась в виде

$$\Psi(x,y) = \frac{n}{q} c x^{2q} + c y^{2n} - a,\ \ a, c \in \mathbb{R}^{>0}. \tag{2}$$

В результате получен следующий результат

Теорема. *Система*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^{2n-1}, \\ \frac{dy}{dt} &= -x^{2q-1} + \mu \Big(\frac{n}{q} c x^{2q} - a\Big)^{2l-1} y^n \end{aligned} \tag{3}$$

имеет функцию Дюлака-Черкаса в виде полинома (2) для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *и при* $0 \neq \mu \in \mathbb{R},\ q, n, l \in \mathbb{N},\ n$ *– нечетное,* $a, c \in \mathbb{R}^{>0}.$ *Таким образом, при указанных условиях система (3) имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Причем если предельный цикл существует, то является устойчивым (неустойчивым) при* $\mu < 0$ $(\mu > 0).$

Для проверки существования предельного цикла выполняется второй шаг, который заключается в построении дополнительной замкнутой трансверсальной кривой, окружающей замкнутую кривую, задаваемую уравнением $\Psi = 0.$ Требуемая кривая на втором шаге находится за счет дополнительного применения признака Дюлака-Черкаса, или признака Дюлака, или их обобщений [2, 3].

С помощью этих методов для некоторых конкретных систем вида (3) доказано существование точно одного предельного цикла во всей фазовой плоскости.

Литература

1. Черкас Л. А. *Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости* // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 42. № 5. С. 208–211.

2. Гринь А. А. *Трансверсальные кривые для установления точного числа предельных циклов автономных систем на плоскости* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 4. С. 427–437.

3. Гринь А. А., Кузьмич А. В. *Признак Дюлака-Черкаса для точной оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 174–182.

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

О.О. Курбанбаев

В работе исследуется на разрешимость задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n го порядка с отклоняющимся аргументом на симметричном отрезке. Результаты исследования таких задач находят широкое практические применение в технике, экономике и других областях науки $[1,2]$.

Рассмотрим на симметричном отрезке $[-l,l]$ дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом и с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{k=0}^{n}\big(a_k x^{(n-k)}(t)+b_k x^{(n-k)}(-t)\big)=0, \tag{1}$$

Общее решение уравнения (1) будем искать в виде суммы двух функций

$$x(t)=u(t)+\vartheta(t),$$

где $u(t)$ – решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} c_k u^{(n-k)}(t)=0 \tag{2}$$

удовлетворяющее условию $u(t)=u(-t)$, а $\vartheta(t)$ – решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} d_k \vartheta^{(n-k)}(t)=0 \tag{3}$$

удовлетворяющее условию $\vartheta(t)=-\vartheta(-t)$, где $c_k=a_k+b_k$ и $d_k=a_k-b_k$.

Теорема. *Пусть коэффициенты* a_k, b_k, $k=0,1,\ldots,n$ *таковы, что системы*

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(a_{2k}+b_{2k})\lambda^{n-2k}=0, \\ \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(a_{2k+1}+b_{2k+1})\lambda^{n-2k-1}=0 \end{cases} \tag{4}$$

и

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (a_{2k} - b_{2k})\lambda^{n-2k} = 0, \\ \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (a_{2k+1} - b_{2k+1})\lambda^{n-2k-1} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

имеет по крайней мере, одно решение в виде $\lambda = \alpha \pm \beta i$, *в котором одно из* α *или* β *равно нулю. Тогда решение задачи (1) существует.*

Действительно, если имеется решение относительно λ. Если $\lambda = \lambda_1$ решение системы (4) и $\lambda = \lambda_2$ решение системы (5), то, как видно из этих систем, $\lambda = -\lambda_1$ и $\lambda = -\lambda_2$ тоже являются соответствующими решениями этих систем. А это обеспечит существование решений (2), удовлетворяющих условию $u(t) = u(-t)$ и (3) удовлетворяющие условию $\vartheta(t) = -\vartheta(-t)$.

Таким образом, получается общее решение уравнения (1) в виде $x(t) = u(t) + \vartheta(t)$.

Например, для уравнения

$$2x''(t) + x''(-t) + x(t) + 2x(-t) = 0 \tag{6}$$

имеем $u(t) = C_1 \cos t$ и $\vartheta(t) = C_2 \left(e^t - e^{-t}\right)$. Тогда общее решение уравнения (6) имеет вид: $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \left(e^t - e^{-t}\right)$.

Для уравнения

$$2x'''(t) + x'''(-t) + 2x''(t) + x''(-t) + 2x'(t) + x'(-t) + 2x(t) + x(-t) = 0 \tag{7}$$

имеем $u(t) = C_1 \cos t, \quad \vartheta(t) = C_2 \sin t$. Тогда общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Литература

1. Норкин С. Б. *Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом.* М.: Наука. 1965.

2.Абрегов М. Х., Канчукоев В. З., Шарданова М. А. *Краевая задача первого рода для линейного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом на симметричном отрезке* // Международный научно-исследовательский журнал. 2016. В. №5(47). Ч. 5.

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

В.Н. Лаптинский

Изучается задача отыскания $x \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ из совокупности соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$\int\limits_0^\omega \Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \tag{2}$$

где $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $\Psi_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,k}$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$. Соотношение (2) при $k = \infty$ является интегральным условием типа [1, с. 264];

более широкий круг таких условий описан в [2, гл. IX, §5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, возможно, базисного типа [3, гл. 4], в частности, $\Phi_i(t) = \Psi_i(t)$.

В предлагаемой работе конструктивный метод [3, гл. 4] развит на основе [4, 5] применительно к задаче (1), (2). Сначала определяется принципиальная структура искомого решения. Пусть эта задача разрешима. Для возможных решений класса $\mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ системы (2) с помощью подхода [4, 5] при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение типа [3, гл. 4]

$$x(t) = y(t) + \int_0^\omega Q(t,\tau)y(\tau)\,d\tau + q(t), \tag{3}$$

где $y(t)$ – вспомогательная функция, аналогичная [3, гл. 4], вырожденное ядро $Q(t,\tau)$ представлено через $\Phi_i(t)$, $\Psi_i(t)$ на основе алгоритма

$$Q_{j+1}(t,\tau) = Q_j(t,\tau) - \left[\Phi_{j+1}(t) + \int_0^\omega Q_j(t,s)\Phi_{j+1}(s)\,ds\right]\left(\widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left[\Psi_{j+1}(\tau) + \int_0^\omega \Psi_{j+1}(s)Q_j(s,\tau)\,ds\right], \quad j=\overline{0,k-1},$$

тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку I.

Функция $y(t)$ поэтапно в рамках соотвествующего алгоритма доопределяется с сохранением произвола при построении функций $Q_m(t,\tau)$, $q_m(t)$ так, что $Q_0(t,\tau) = 0$, $q_0(t) = 0$, $Q(t,\tau) = Q_k(t,\tau)$, $q(t) = q_k(t)$, $y(t) = y_k(t)$,

$$R_{j+1}(t) = \Phi_{j+1}(t) + \int_0^\omega Q_j(t,\tau)\Phi_{j+1}(\tau)\,d\tau,$$

$$q_{j+1}(t) = q_j(t) + \delta_{j+1}(t) + \int_0^\omega Q_j(t,\tau)\delta_{j+1}(\tau)d\tau,$$

где

$$\delta_{j+1}(t) = \Phi_{j+1}(t)\left(\widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}}\right)^{-1}\left(\mu_{j+1} - \int_0^\omega \Psi_j(\tau)q_j(\tau)d\tau\right),$$

при этом предполагается

$$\det\widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}} \neq 0, \quad j=\overline{0,k-1}. \tag{4}$$

Соотношение (3) принимается за основу как представление типа [3, гл. 4] решения задачи (1), (2). С помощью [3, гл. 3] установлено, что задача (1), (2) в представлении (3) эквивалентна интегральной задаче

$$y(t) = \int_0^\omega \mathcal{K}(t,\tau)y(\tau)\,d\tau + p(t), \tag{5}$$

где

$$\mathcal{K}(t,\tau) = U(t)Q(0,\tau) - Q(t,\tau), \quad p(t) = U(t)\left[y_0 + q_0 + \int\limits_0^t U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right] - q(t);$$

$y_0 = y(0)$, $q_0 = q(0)$, $U(t)$ $(U(0) = E)$ – фундаментальная матрица однородного уравнения в (1).

Введём следующие обозначения:

$$b = \max_{t\in I}\int\limits_0^\omega \|Q(t,\tau)\|\,d\tau, \;\; a = \max_{t\in I}\int\limits_0^\omega \|\mathcal{K}(t,\tau)\|\,d\tau, \;\; h = \max_{t\in I}\|p(t)\|, \;\; \sigma = \max_{t\in I}\|q(t)\|,$$

где $\|\cdot\|$ – любая из норм, приведенных в [6, с. 21].

Лемма. *При выполнении условия $a < 1$ решение уравнения (5) существует и единственно, при этом справедлива оценка* $\|y(t)\| \leqslant \dfrac{h}{1-a}$.

Теорема. *Пусть $a < 1$ и выполнено условие (4). Тогда решение задачи (1), (2) в представлении (3) существует и единственно, при этом справедлива оценка*

$$\|x(t)\| \leqslant \frac{(1+b)h}{1-a} + \sigma.$$

Для построения решения используется классический метод последовательных приближений (см., например, [1, с. 605]).

Замечание. Применение метода Гаусса к системе (2) на основе

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \Phi_i(t)c_i + y(t)$$

приводит к её решению типа (3) с более сложным алгоритмом построения векторов c_i.

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.
2. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскнер А. Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.
4. Лаптинский В. Н. *К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств* // IX Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. конф. Гродно: ГрГУ, 2004. Ч. 1. С. 81–82.
5. Лаптинский В. Н. *Об одной задаче теории векторных пространств* // X Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 3-–7 ноября 2008 г. / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т матем. Минск, 2008. Ч. 3. С. 65–66.
6. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

К АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА–РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

В конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max\limits_t \|X(t)\|$ исследуется краевая задача [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + \lambda F(t,X), \tag{1}$$

$$X(0,\lambda)=X(\omega,\lambda), \tag{2}$$

где $(t,X)\in I\times\mathbb{R}^{n\times n}$, $A,B,Q\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $F\in\mathbb{C}(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho}=\{(t,X): t\in I,\ \|X\|<\tilde\rho\}$, удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально): $F(t,0)\not\equiv 0$; $I=[0,\omega]$, $\omega>0$, $0<\tilde\rho\leqslant\infty$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

В случае $Q=0$, $\lambda=1$ эта задача конструктивными методами [3] изучалась в [4 и др.], с периодическими краевыми условиями в [5]. С помощью качественных методов задача (1), (2) в области $I\times\mathbb{R}^{n\times n}$ рассматривалась в работе [6]. Предлагаемая работа является продолжением и развитием [1, 2, 7].

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho=\{(t,X): 0\leqslant t\leqslant\omega,\ \|X\|\leqslant\rho\},\ M=\int_0^\omega A(\tau)\,d\tau,\ N=-\int_0^\omega B(\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma=\|\Phi^{-1}(\omega)\|,\quad \alpha=\max_t\|A(t)\|,\quad \beta=\max_t\|B(t)\|,\quad \delta=\max_t\|Q(t)\|,$$

$$h=\max_t\|F(t,0)\|,\quad \varepsilon=|\lambda|,$$

$$q(\rho,\varepsilon)=q_1(\rho)+q_2(\rho)\varepsilon,\quad \varphi(\rho,\varepsilon)=\varphi_1(\rho)+\varphi_2(\rho)\varepsilon,$$

$$q_1(\rho)=\gamma\delta\omega\big[(\alpha+\beta)\omega+2\big]\rho+\frac12\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2,\ q_2(\rho)=\gamma\omega L\big[1+\frac12(\alpha+\beta)\omega\big],$$

$$\varphi_1(\rho)=\gamma\delta\omega\big[1+\frac12(\alpha+\beta)\omega\big]\rho^2+\frac12\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2\rho,\ \varphi_2(\rho)=\big[1+\frac12(\alpha+\beta)\omega\big](L+h)\gamma\omega,$$

$$\varepsilon_1=\frac{\rho-\varphi_1(\rho)}{\varphi_2(\rho)},\quad \varepsilon_2=\frac{1-q_1(\rho)}{q_2(\rho)},\quad \varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2\},$$

где $0<\rho<\tilde\rho$, $t\in I$, $L=L(\rho)>0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, Φ – линейный матричный оператор, $\Phi Z=MZ-ZN$, $\|\cdot\|$ – подходящая норма матриц в $\mathcal{B}(n)$, например, любая из норм, приведенных в [8, с. 21].

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: матрицы M,N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_1(\rho)<\rho$, $q_1(\rho)<1$. Тогда при $|\lambda|<\varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}}\leqslant\varphi(\rho,\varepsilon)$.*

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой

$$X_{k+1}(t,\lambda)=$$

$$=\Phi^{-1}\Big\{\int_0^\omega A(\tau)d\tau\Big(\int_\tau^t[A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda)+X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma)+X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)+$$

$$+\lambda F(\sigma,X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma\Big)d\tau+\int_0^\omega\Big(\int_\tau^t[A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda)+X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma)+$$

$$+X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)+\lambda F(\sigma,X_{k-1}(\sigma,\lambda))]\,d\sigma\Big)B(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_0^\omega[X_k(\tau,\lambda)Q(\tau)X_k(\tau,\lambda)+\lambda F(\tau,X_k(\tau,\lambda))]\,d\tau,\quad k=1,\,2,\,\ldots, \tag{3}$$

где $X_0 = 0$, $X_1 = -\lambda\Phi^{-1}\int\limits_0^{\omega} F(\tau, 0)\,d\tau$; очевидно $\|X_1\| \leqslant \rho$ при $|\lambda| < \varepsilon_0$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X - X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{q\|x_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}} + p\|X_k - X_{k-1}\|_{\mathbb{C}}}{1-q}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots, \tag{4}$$

где

$$p = \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)^2\omega^2 + \gamma\omega(2\delta\rho + \varepsilon L).$$

Оценка (4) дополнена следующими оценками

$$\|X_1\|_{\mathbb{C}} \leqslant \varepsilon\gamma\omega h;$$

$$\|X_2 - X_1\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2[(\alpha+\beta)\rho + \varepsilon h] + \gamma\omega(\delta\rho^2 + \varepsilon L\rho),$$

которые позволяют выразить оценку (4) через исходные данные задачи.

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрена модельная задача при $n = 2$.

Замечание. В [6] приведен алгоритм с неявной вычислительной схемой. Он неудобен тем, что при построении приближений на каждом шаге итерации следует решать соответствующее интегральное уравнение.

Литература

1. Маковецкая О. А. // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 43–50.
2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 937–946.
3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.
5. Лаптинский В. Н. // Весці АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.
6. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S.// Journal of mathematical analysis and applications. 1992. V. 167. P. 505–515.
7. Маковецкая О. А. *К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром* // Материалы междунар. науч. конф. «Еругинские чтения–2019». Минск, 2019. Т. 1. С. 83–84.
8. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА

В.И. Мироненко, В.В. Мироненко

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью и общим решением в форме Коши $\varphi(t;\, t_0, x_0)$. Для нее определена *отражающая функция* $F(t,x) := \varphi(-t;\, t,x)$ [1].

Если $F(t,x)$ – отражающая функция системы (1), то для любого решения $x(t)$ этой системы, определенного на симметричном интервале $(-\alpha,\,\alpha)$, верно тождество $F\big(t,x(t)\big)\equiv x(-t)$. Благодаря этому знание отражающей функции $F(t,x)$ системы (1) позволяет найти начальные данные $x(\omega)$ краевой задачи $G\big(\omega,x(\omega),x(-\omega)\big)=0$ из уравнения $G\Big(\omega,x(\omega),F\big(\omega,x(\omega)\big)\Big)=0$ и определить характер устойчивости решений этой задачи.

Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F.}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)+X(-t,F)=0,\quad F(0,x)\equiv x.$$

В частности, если $X(t,x)$ нечетна по t, то отражающая функция системы (1)

$$F(t,x)\equiv x$$

и все решения $x(t)$, $x(0)=x_0\in D$, системы (1) представляют собой четные вектор-функции.

Если $U(t,x)$ – первый интеграл дифференциальной системы (1) с отражающей функцией $F(t,x)$, то для любого решения $x(t)$, $x(0)=x_0$, этой системы справедливо соотношение $U\big(t,x(t)\big)\equiv\mathrm{const}$ и, значит, верно тождество $U\big(-t,F(t,x)\big)\overset{t,x}{\equiv}U(t,x)$.

Дифференцируемую функцию $U(t,x)$, отличную от постоянной и обладающую свойством $U\big(t,x(t)\big)\overset{t,x}{\equiv}U\big(-t,x(-t)\big)$, естественно рассматривать, как обобщение первого интеграла.

Теорема 1. *Пусть для дифференцируемых функций* $U(t,x):=\big(U_1(t,x),\dots,U_r(t,x)\big)$, $r\in\mathbb{N}$, *выполнены тождества*

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}X(t.x)\equiv f_{od}(t,U(t,x)),$$

где $f_{od}(t,U)$ *– нечетна по* t. *Тогда для отражающей функции* $F(t,x)$ *дифференциальной системы (1) выполнено тождество* $U\big(-t,F(t,x)\big)\equiv U(t,x)$, *а для каждого решения* $x(t)$, $t\in(-\alpha,\,\alpha)$, *системы (1) тождество* $U\big(-t,x(-t)\big)\equiv U\big(t,x(t)\big)$.

Следствие. *Пусть для* 2ω*-периодической дифференциальной системы (1) существуют функции* $U(t,x):=\big(U_1(t,x),...,U_r(t,x)\big)$, *удовлетворяющие условиям теоремы 1. Тогда отображение Пуанкаре* $\Pi(x):=F(-\omega,x)=\varphi(\omega;\,-\omega,x)$ *на периоде* $[-\omega,\,\omega]$ *удовлетворяет соотношению* $U\big(\omega,\Pi(x)\big)\equiv U(-\omega,x)$.

Теорема 2. *Пусть для дифференцируемых функций* $X_0(\rho,\cos\varphi)$ *и* $X_1(\rho,\cos\varphi)$ *существуют дифференцируемые функции* $U(\rho,\cos\varphi)$ *и* $V(\rho,\cos\varphi)$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial\rho}X_0+UVcos\varphi+U\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}X_1-\frac{\partial V}{\partial c}\right)(1-\cos^2\varphi)\equiv0,\\&\frac{\partial U}{\partial\rho}X_1-\frac{\partial U}{\partial c}+U\frac{\partial V}{\partial\rho}X_0=Uf(Ue^{v\sin\varphi},\cos\varphi),\end{aligned}$$

где $\dfrac{\partial U}{\partial\rho}$ *и* $\dfrac{\partial V}{\partial c}$ *– частные производные от функций* $U(\rho,\cos\varphi)$ *и* $V(\rho,\cos\varphi)$ *по* $\cos\varphi$, *а* $f(x_1,x_2)$ *– непрерывная функция двух переменных.*

Тогда отражающая функция $F(\rho,\varphi)$ *уравнения* $\dfrac{d\rho}{d\varphi}=X_0(\rho,\cos\varphi)+X_1(\rho,\cos\varphi)\sin\varphi$ *удовлетворяет тождеству*

$$U(F,\cos\varphi)e^{-V(F,\cos\varphi)\sin\varphi}=U(\rho,\cos\varphi)e^{V(\rho,\cos\varphi)\sin\varphi}.$$

Теорема 2 при выполнении ее условий позволяет решить проблему центра-фокуса. При нахождении функций $U,\ V$ разумно иногда определить вначале функцию V как первый интеграл уравнения $\dfrac{d\rho}{dc}=-X_1(\rho,c)$.

Эта теорема допускает обобщение и на системы произвольной размерности.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Минск: Университетское, 1986.

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ (ДВУСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ)

Д.В. Роголев

Исследуется краевая задача типа [1, 2]

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt}&=G_1(t,X,Y),\\ \frac{dY}{dt}&=G_2(t,X,Y),\end{aligned}\tag{1}$$

$$X(0)=X(\omega),\quad Y(0)=Y(\omega),\tag{2}$$

где

$$G_1(t,X,Y)=A_1(t)X+XB_1(t)+XS_1(t)X+XS_2(t)Y+YC(t)Y+F_1(t),$$
$$G_2(t,X,Y)=A_2(t)Y+YB_2(t)+YP_1(t)X+YP_2(t)Y+XQ(t)X+F_2(t)$$

с коэффициентами класса $\mathbb{C}\left(I,\,\mathbb{R}^{n\times n}\right),\ (t,X,Y)\in I\times\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n};\ I=[0,\omega]\,,\ \omega>0.$

Введены следующие обозначения:

$$D=\{(t,X,Y)\colon t\in I,\ \|X\|\leqslant\rho_1,\ \|Y\|\leqslant\rho_2\},\quad M_i=\int\limits_0^\omega A_i(\tau)d\tau,\quad N_i=-\int\limits_0^\omega B_i(\tau)d\tau,$$

$$\gamma_i=\left\|\Phi_i^{-1}(\omega)\right\|,\quad \alpha_i=\max_{t\in I}\|A_i(t)\|\,,\quad \beta_i=\max_{t\in I}\|B_i(t)\|\,,\quad \delta_i=\max_{t\in I}\|S_i(t)\|\,,$$

$$\mu_i=\max_{t\in I}\|P_i(t)\|\,,\quad \sigma=\max_{t\in I}\|C(t)\|\,,\quad \nu=\max_{t\in I}\|Q(t)\|\,,\quad h_i=\max_{t\in I}\|F_i(t)\|\,,$$

$$\varphi_1(\rho_1,\rho_2)=\gamma_1\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha_1+\beta_1\right)\left[\left(\alpha_1+\beta_1\right)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+\sigma\rho_2^2+h_1\right]\omega^2+\right.$$
$$\left.+\left(\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+\sigma\rho_2^2+h_1\right)\omega\right\},$$

$$\varphi_2(\rho_1,\rho_2)=\gamma_2\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha_2+\beta_2\right)\left[\left(\alpha_2+\beta_2\right)\rho_2+\nu\rho_1^2+\mu_1\rho_1\rho_2+\mu_2\rho_2^2+h_2\right]\omega^2+\right.$$
$$\left.+\left(\nu\rho_1^2+\mu_1\rho_1\rho_2+\mu_2\rho_2^2+h_2\right)\omega\right\},$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\rho) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\rho_1, \rho_2) \\ \varphi_2(\rho_1, \rho_2) \end{pmatrix}, \quad A = \varphi'(\rho),$$

где $\rho_i > 0$, Φ_i – линейные операторы, $\Phi_i Z = M_i Z - Z N_i$, $\varphi'(\rho)$ – матрица Якоби для $\varphi(\rho)$; $Z = \{X, Y\}$, $i = 1, 2$.

В настоящей работе, являющейся обобщением и развитием [1–3], на основе применения метода [4, гл. 3] получена

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\sigma(M_i) \cap \sigma(N_i) = \varnothing$ $(i = 1, 2)$ $(\sigma(K)$ *– множество характеристических чисел матрицы* $K)$;

2) $\varphi(\rho) \leqslant \rho$;

3) $a_{11} < 1$, $\det(E - A) > 0$, *где* $E = \mathrm{diag}(1, 1)$.

Тогда задача (1), (2) *однозначно разрешима в области* D.

Выведен алгоритм построения решения, основанный на неявной вычислительной схеме типа [4, гл. 3] и имеющий в дифференциальной форме вид

$$\frac{dX_{k+1}}{dt} = G_1(t, X_k, Y_k), \tag{3}$$

$$\frac{dY_{k+1}}{dt} = G_2(t, X_k, Y_k), \tag{4}$$

$$X_{k+1}(0) = X_{k+1}(\omega), \tag{5}$$

$$Y_{k+1}(0) = Y_{k+1}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где в качестве начального приближения $\big(X_0, Y_0\big)$ приняты постоянные матрицы, определяемые из условий (5), (6) для приближения $\big(X_1(t), Y_1(t)\big)$ соответственно:

$$\int_0^\omega G_1(\tau, X_0, Y_0)d\tau = 0, \quad \int_0^\omega G_2(\tau, X_0, Y_0)d\tau = 0.$$

С помощью конструктивного регуляризатора [4, гл. 3] на основе (3)–(6) получено рекуррентное интегральное соотношение для вычисления функций $X_k(t)$, $Y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} X_k(t) = \Phi_1^{-1} \Bigg\{ & \int_0^t \left(\int_0^\tau A_1(\sigma)d\sigma \right) G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau))d\tau - \\ & - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A_1(\sigma)d\sigma \right) G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau))\, d\tau + \\ & + \int_0^t G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \left(\int_0^\tau B_1(\sigma)d\sigma \right) d\tau - \\ & - \int_t^\omega G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \left(\int_\tau^\omega B_1(\sigma)d\sigma \right) d\tau - \\ & - \int_0^\omega \left[G_1(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)) - A_1(\tau)X_k(\tau) - X_k(\tau)B_1(\tau) \right] d\tau \Bigg\}, \end{aligned}$$

$$Y_k(t) = \Phi_2^{-1}\left\{\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau A_2(\sigma)\,d\sigma\right) G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau))\,d\tau - \right.$$

$$-\int\limits_t^\omega \left(\int\limits_\tau^\omega A_2(\sigma) d\sigma\right) G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \left(\int\limits_0^\tau B_2(\sigma) d\sigma\right) d\tau -$$

$$-\int\limits_t^\omega G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \left(\int\limits_\tau^\omega B_2(\sigma)\,d\sigma\right) d\tau -$$

$$\left. -\int\limits_0^\omega \left[G_2(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)) - A_2(\tau) Y_k(\tau) - Y_k(\tau) B_2(\tau)\right] d\tau \right\}.$$

Исследованы вопросы сходимости, скорости сходимости предложенного алгоритма, при этом получены соответствующие оценки погрешностей приближённых решений.

Литература

1. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1412–1420.

2. Лаптинский В. Н., Роголев Д.В. *К конструктивному анализу периодической краевой задачи для системы матричных уравнений Риккати* // Третья междунар. науч. конф. «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения»: тез. докл., Брест, 17–22 сент. 2012 г. Брест: БрГУ, 2012. С. 66.

3. Роголев Д. В. *Анализ периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати* // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А.Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2011. № 1(37). Могилёв: МГУ, 2011. С. 4–19.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМЫ $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{e}(\mathbf{x})\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{x})\mathbf{y}^2$ И ЕЕ ИЗОХРОННОСТЬ

А.Е. Руденок

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -e(x)y, \quad \dot{y} = a(x) + c(x)y^2, \tag{1}$$

где $e(x)$, $a(x)$, $c(x)$ – голоморфные в окрестности $x = 0$ функции, $e(0) = 1$, $a(0) = 0$, $a'(0) = 1$. Две системы вида (1) будем называть *эквивалентными*, если существует преобразование вида

$$x \to F(x), \quad y \to yG(x), \tag{2}$$

переводящее системы одну в другую. Для системы (1) введем функции $B(x)$, $h(x)$ по формулам:

$$h(x) = 2\big(-1 + a(x)c(x) + e(x)a'(x)\big), \quad B(x) = a(x)e(x)h'(x). \tag{3}$$

Теорема 1. *Если функции h, B, определенные формулами (3), связаны функциональным соотношением*

$$B(x) = K\big(h(x)\big), \tag{4}$$

то функция K является инвариантом системы (1) при преобразованиях (2).

Теорема 2. *Если для некоторой изохронной системы (1) функции (3) связаны соотношением (4), то любая другая система вида (1), у которой функции (3) связаны тем же соотношением K, изохронная.*

Теорема 3. *Если для системы (1) $h(x) = 0$, то система (1) изохронная и имеет вид*

$$\dot{x} = -e(x)y, \quad \dot{y} = a(x) + \frac{1 - e(x)a'(x)}{a(x)}y^2.$$

Теорема 4. *Если для системы (1)*

$$B(x) = \frac{1}{3}h(x)\big(3 + 2h(x)\big), \tag{5}$$

то она изохронная.

Доказательство. Система

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{x(1-kx)\,(1 - 2kx + 2k^2x^2)}{(1-2kx)^3},$$

$k \in \mathbb{R}$, изохронная [1], и ее функции (3) связаны соотношением (5).

Теорема 5. *Система*

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{r(x)\big(1 + r(x)\big)^3}{r'(x)} + \left(-\frac{3r'(x)}{1 + r(x)} + \frac{r''(x)}{r'(x)}\right)y^2, \tag{6}$$

$r(x) = k\,x + \ldots$, $k \in \mathbb{R}$, *изохронная.*

Доказательство. Система

$$\dot{x} = -(1 + kx)^3 y, \quad \dot{y} = x$$

$k \in \mathbb{R}$, изохронная [2], а функции (3) этой системы и функции (3) системы (6) связаны одним и тем же соотношением (4).

Литература

1. Руденок А. Е. *Системы Льенара с центром и изохронным центром* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 70–83.

2. Волокитин Е. П, Иванов В. В. *Изохронность и коммутируемость полиномиальных векторных полей* // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 1. С. 30–48.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ «НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА» КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

И.Н. Сидоренко

Рассмотрим каноническую систему Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \;\; \frac{dy}{dt} = x\big(1 - x\big)\big(1 - (Lx)\big) - \varepsilon\big(a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3\big)y, \tag{1}$$

где $L\mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$. Поместим в точку $O(0;0)$ седло, а в точку $E(1,0)$ – антиседло, что соответствует условию $L<0$. Данная работа является продолжением и развитием [1, 2]. Целью данной работы является исследование максимального количества предельных циклов «нормального размера» [2] у систем (1), а также построение конкретных систем рассматриваемого класса с различными распределениями предельных циклов. Для исследования семества систем (1) будем использовать прогнозный метод [3] оценки числа предельных циклов. Метод основывается на решении алгебраической системы уравнений

$$F(\xi)=F(\psi), \quad G(\xi)=G(\psi), \tag{2}$$

где $F(x)=\int f(x)du$, $G(x)=\int g(x)du$, промежутки изменения переменных ξ, ψ зависят от выбора особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов. Для "улучшения" полученных систем используется метод, разработанный для возмущения негрубого фокуса [4]. Обозначим через a – вектор коэффициентов системы (1), и пусть при $a=a^0$ система имеет k предельных циклов вокруг точки $O(0,0)$, которые распределены не равномерно. Выберем на промежутке $I=[p,q]$, $p>0$, точки $x_1, \ldots, x_{k+1}$ и рассмотрим функцию последования $\Delta(x,a^0+\Delta a)$, $x\in I$, Δa некоторое возмущение системы (1), тогда $\Delta(x_i,a^0+\Delta a)=$ $=\Delta(x_i,a^0)+\sum\limits_{j=1}^{n} tp(i,j)\Delta a_j+o(\Delta a)$, где $tp(i,j)=\dfrac{\partial\Delta^k(x_i^k,a^0)}{\partial a_j}$ находятся численно. Далее решаем задачу линейного программирования

$$L\to\min, \quad \pm(-1)^i\left(\Delta(x_i,a^0)+\sum_{j=1}^{n} tp^k(i,j)\Delta a_j\right)\geqslant 0, \quad i=\overline{1,k+1}, \quad |\Delta a_j|\leqslant L. \tag{3}$$

Если задача (3) имеет решение $\Delta a=\Delta a^*$, $L=L^*$, то соответствующая система Льенара имеет, по крайней мере, k предельных циклов.

Теорема. *Для системы Льенара*

$$\frac{dx}{dt}=y, \ \ \frac{dy}{dt}=x\big(1-(1+L)x+Lx^2\big)-\varepsilon(a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3)y \tag{4}$$

с $L=-\dfrac{1}{2}$, $a_3=1$, $a_4=-1$, *имеющей антиседла* $A(-2,0)$, $E(1,0)$ *и седло* $O(0,0)$ *выполняются следующие утверждения:*

1. *Все решения соответствующей системы прогноза (2) для системы Льенара (4) типа* $\big((k_2,k_3),k_1\big)$ *удовлетворяют неравенству* $k_1+k_2+k_3\leqslant 4$.

2. *Система прогноза (2) для рассматриваемой системы Льенара (4) может иметь решения только следующих типов:* $\big((1,0),0\big)$, $\big((0,1),0\big)$, $\big((0,0),1\big)$, $\big((1,0),1\big)$, $\big((0,1),1\big)$, $\big((1,1),1\big)$, $\big((0,2),0\big)$, $\big((2,0),0\big)$, $\big((0,0),2\big)$.

3. *В каждой области пространства коэффициентов, в которой система прогноза имеет решение типа* $\big((k_2,k_3),k_1\big)$, *существует подмножество, в котором система Льенара (3) при* $\varepsilon=0.01$ *имеет такое же распределение* $\big((k_2,k_3),k_1\big)$ *предельных циклов.*

4. *Если* $k_2=0$ $(k_3=0)$, *то система Льенара (4) не имеет предельных циклов, окружающих особую точку* $A(-2,0)$ $(E(1,0))$.

Литература

1. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы «нормального размера», окружающие группу особых точек систем Льенара с симметрией* // Веснiк Магiлёўскага дзяржаўнага ўнiверсiтэта iмя А.А. Куляшова. 2019. № 2(54). С. 21—29.

2. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы нормального размера систем Льенара с симметрией* // Веснiк Магiлёўскага дзяржаўнага ўнiверсiтэта iмя А.А. Куляшова. 2009. № 4(34). С. 167–174.

3. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы «нормального размера» систем Льенара с пятью особыми точками* // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю.С. Богданова: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 1–4 июня 2021 г. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2021. С. 214-–215.

4. Черкас Л. А., Гринь А. А., Булгаков В. И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход).* Гродно: ГрГУ, 2013.

О КОМПАКТНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Ю. Тыщенко

Рассмотрим вполне разрешимую [1, с. 230] невырожденную [2] дискретную динамическую систему, образованную биголоморфизмами

$$f_j : G \to \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1}$$

где область $G \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$. При этом будем полагать, что все отображения $f_j^{s_j}$ имеют общую область определения, где $s_j \in \mathbb{Z}$, f_j^{-1} – отображение, обратное к f_j, $j = \overline{1, m}$, произведения отображений обозначают суперпозиции соответствующих отображений. Согласно [2, 3] система (1) определяет на G сингулярное слоение размерности m.

Определение 1. Изолированную компактную инвариантную гиперповерхность системы (1) будем называть *регулярной*, если данная гиперповерхность является в каждой из двух определяемых ею полуокрестностей локально притягивающей или локально отталкивающей для каждого биголоморфизма f_j, $j = \overline{1, m}$.

Наряду с пространством $\mathbb{R}^n$ будем использовать его компактификацию с использованием n-мерной сферы S^n, полученной добавлением бесконечно удаленной точки ∞ при применении многомерной стереографической проекции. При этом все вычисления будем проводить в карте сферы S^n, соответствующей пространству $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что область G образована лакунами (линейно связными множествами, для каждого из которых существует гиперповерхность, гомеоморфная $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1} и содержащая внутри себя это и только это множество) Γ_l, $l = \overline{1, r+1}$. При этом лакуны Γ_l, $l = \overline{1, r}$, не содержат бесконечно удаленную точку ∞ (их будем называть внутренними), а внешняя лакуна Γ_{r+1} содержит бесконечно удаленную точку ∞.

Расмотрим гладкие на области G дифференциальные $(n-1)$-формы ω и $\omega(g_j)$, а также образованную на их основе дифференциальную $(n-1)$-форму

$$\varpi_j(x) = \omega(g_j(x)) - \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i^j(x) dx^i,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, внешние произведения

$$dx^i = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n, \quad i = \overline{1, n}, \quad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Дифференциальной $(n-1)$-форме ϖ_j на области G поставим в биективное соответствие гладкое векторное поле $a^j = (a_1^j, \ldots, a_n^j)$. Также будем рассматривать всевозможные пределы

$$\lim_{\gamma_l \to \Gamma_l} \int\limits_{\gamma_l} \varpi_j\,, \tag{2}$$

где γ_l есть простая замкнутая (т.е. гомеоморфная сфере S^{n-1}) кусочно-гладкая гиперповерхность (в дальнейшем все гиперповерхности будем полагать кусочно-гладкими), внутри которой расположена лакуна Γ_l (и только она одна), $l = \overline{1,r}$. При этом будем считать, что ориентация гиперповерхностей γ_l согласована с ориентацией внутренности.

Определение 2. Верхний (нижний) точный предел (2) будем называть *верхним (нижним) индексом внутренней лакуны* Γ_l *относительно дифференциальной* $(n-1)$*-формы* ϖ_j и обозначать символом $\overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_l$ $(\underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_l)$, $l=\overline{1,r}$.

При этом будем использовать следующие условные обозначения:

$$sgn\,\overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_l = \left[\begin{array}{l} +1 : \overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_l \in (0,+\infty], \\ 0 : \overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_l = 0, \\ -1 : \overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_l \in [-\infty, 0); \end{array}\right. \quad sgn\,\underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_l = \left[\begin{array}{l} +1 : \underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_l \in (0,+\infty], \\ 0 : \underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_l = 0, \\ -1 : \underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_l \in [-\infty, 0); \end{array}\right. \quad l=\overline{1,r}.$$

Имеют место следующие утверждения [4, 5].

Теорема 1. *Пусть существует такая непрерывная на области G функция μ, что на данной области (кроме, быть может, множества n-мерной меры нуль) выполняется одно из двух условий:*

$$\mu\big(f_j(x)\big)\det J\big(f_j(x)\big) - \mu(x) > 0 \quad \text{или} \quad \mu\big(f_j(x)\big)\det J\big(f_j(x)\big) - \mu(x) < 0,$$

где $J\big(f_j(x)\big)$ есть матрица Якоби биголоморфизма f_j, $j \in \{1,\ldots,m\}$. Тогда на области G система (1) может иметь не более r компактных инвариантных гиперповерхностей.

Теорема 2. *Пусть существует такая непрерывная знакопостоянная на области G функция μ, что на данной области (кроме, быть может, множества n–мерной меры нуль) выполняется условие $\mu\big(f_j(x)\big)\det J\big(f_j(x)\big) - \mu(x) = 0$, $j\in\{1,\ldots,m\}$. Тогда на области G система (1) может иметь не более r изолированных компактных регулярных инвариантных гиперповерхностей.*

Теорема 3. *Линейная система (1) (т. е. система, порожденная биголоморфизмами $f_j\colon x \to A_j x + b_j$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $j=\overline{1,m}$, где $A_j \in GL(n,\mathbb{R})$, $b_j\in\mathbb{R}^n$, $j=\overline{1,m}$) не имеет изолированных компактных регулярных инвариантных гиперповерхностей.*

Теорема 4. *Пусть существуют такие гладкая на области G дифференциальная $(n-1)$-форма ω и индекс $j\in\{1,\ldots,m\}$, что на данной области (кроме, быть может, множества n-мерной меры нуль) выполняется одно из двух условий:*

$$\operatorname{div} a^j > 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} a^j < 0,$$

где $\operatorname{div} a^j$ – дивергенция векторного поля a^j. Тогда на области G система (1) может иметь не более r компактных инвариантных гиперповерхностей.

Теорема 5. *Пусть существуют такие гладкая на области G дифференциальная $(n-1)$-форма ω и индекс $j\in\{1,\ldots,m\}$, что*

$$\{sgn\,\overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_{\tau_i} \vee\ sgn\,\underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_{\tau_i}\} = \{sgn\,\overline{ind}_{\varpi_k}\Gamma_{\tau_k} \vee sgn\,\underline{ind}_{\varpi_k}\Gamma_{\tau_k}\},$$

$$\tau_i \in \{1,\ldots,r\}, \quad \tau_k \in \{1,\ldots,r\}, \quad i=\overline{1,s}, \quad k=\overline{1,s}, \quad s \leqslant r,$$

и при $\tau=\tau_i$ *на данной области (кроме, быть может, множества* n*-мерной меры нуль) выполняется одна из шести серий условий:*

$$\operatorname{div} a^j \cdot sgn\ \overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau > 0; \;\; \operatorname{div} a^j \cdot sgn\ \underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau > 0; \;\; \operatorname{div} a^j > 0, \;\; sgn\ \overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau = 0;$$

$$\operatorname{div} a^j > 0, \;\; sgn\ \underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau = 0; \;\; \operatorname{div} a^j < 0, \;\; sgn\ \overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau = 0; \;\; \operatorname{div} a^j < 0, \;\; sgn\ \underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau = 0.$$

Тогда на области G *система (1) может иметь не более* $r-s$ *компактных инвариантных гиперповерхностей.*

Литература

1. Гайшун И. В. *Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.* М.: УРСС, 2004.

2. Тыщенко В. Ю. *Об инвариантах дискретных динамических систем* // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 752–755.

3. Тыщенко В. Ю. *Базис абсолютных инвариантов вполне разрешимых линейных и дробно-линейных дискретных динамических систем* // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 758–760.

4. Тыщенко В. Ю. *О компактных инвариантных гиперповерхностях дискретных динамических систем* // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 1005–1006.

5. Тыщенко В. Ю. *Об инвариантах и инвариантных гиперповерхностях комплексных дискретных динамических систем* // Известия вузов. Математика. 2021. № 2. С. 44–45.

СИСТЕМЫ С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ЦЕНТРА

Д.Н. Чергинец

А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов показали, что необходимым и достаточным условием центра для систем с центром по линейным членам является обращение в ноль бесконечного числа ляпуновских фокусных величин, которые являются многочленами с целыми коэффициентами от коэффициентов разложения в ряд Тейлора правых частей системы. А.П. Садовским было доказано [1], что такой же вид имеют условия центра систем с линейной частью в виде ненулевой нильпотентной жордановой клетки. Ю.С. Ильяшенко для систем с особой точкой, не имеющей исключительных направлений, доказал [2] алгебраическую неразрешимость проблемы центра и фокуса, то есть что условия центра уже не определяются многочленами. Н.Б. Медведева доказала [3], что проблема центра и фокуса аналитически разрешима в любом простейшем монодромном классе, то есть множество определения параметров системы можно разбить на простейшие монодромные классы, на каждом из которых условия центра определяются аналитическими функциями от параметров системы. Н.Б. Медведева доказала [4] аналитическую неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову на плоскости.

Автором получена система с аналитической правой частью, для которой условие центра определяется функцией, не являющейся аналитической в граничной точке множества значений параметров, при которых особая точка системы является монодромной. Данное множество будем называть областью монодромности. Найдена система с монодромной особой точкой, для которой условие центра определяется функцией, неаналитической в точке, принадлежащей области монодромности. Вычислено асимптотическое представление функции, определяющей условие центра, в точке, в которой нарушается её аналитичность.

Рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \big(2a^2xy + y^2(bx^2+y^2)\big)x - (a^2x^2+y^2)y,\\
\frac{dy}{dt} &= \big(2a^2xy + y^2(bx^2+y^2)\big)y + (a^2x^2+y^2)x,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Автором доказана следующая

Теорема 1. *Положение равновесия $O(0,0)$ системы (1) является центром тогда и только тогда, когда $b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a)$, где*

$$
\Phi_n(a) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)^{2+\sigma}(a^2+t^2)^{1-\sigma}}\,dt, \quad \sigma := 2a^2/(1-a^2).
$$

Причем

$$
b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a) = -1 - 2a - 4a^2 - 8a^3\ln a + O(a^3), \qquad a \to +0.
$$

Следствие 1. *Условие центра системы (1) определяется функцией, которая является неаналитической на границе области монодромности.*

При $a = 0$ положение равновесия $O(0,0)$ системы (1) не является изолированным, так как каждая точка оси OX является положением равновесия. Поэтому рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{a^2+y^2}\Big(\big(2a^2xy + y^2(bx^2+y^2)\big)x - (a^2x^2+y^2)y\Big),\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{a^2+y^2}\Big(\big(2a^2xy + y^2(bx^2+y^2)\big)y + (a^2x^2+y^2)x\Big),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $-1 < a < 1$. Будем считать, что при $a = 0$ система (2) имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= (bx^2+y^2)x - y,\\
\frac{dy}{dt} &= (bx^2+y^2)y + x.
\end{aligned}
$$

Для системы (2) справедлива нижепреведенная

Теорема 2. *Особая точка $O(0,0)$ системы (2) является центром тогда и только тогда, когда $b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a)$, причем*

$$
-\Phi_4(a)/\Phi_2(a) = -1 - 2|a| - 4a^2 - 8|a|^3\ln|a| + O(a^3), \quad a \to 0.
$$

Следствие 2. *Необходимое и достаточное условие центра для системы (2) определяется функцией, которая является неаналитической во внутренней точке области монодромности.*

Литература

1. Садовский А. П. *О проблеме различения центра и фокуса для систем с ненулевой линейной частью* // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 7. С. 1238–1246.

2. Ильяшенко Ю. С. *Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр–фокус* // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6. № 3. С. 30–37.

3. Медведева Н. Б. *Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса* // Сборник статей, Тр. МИАНГ. 2006. Т. 254. С. 11–100.

4. Медведева Н. Б. *Об аналитической неразрешимости проблемы устойчивости на плоскости* // УМН. 2013. Т. 68. Вып. 5(413). С. 147–176.

CONSTRUCTING A "BENDIXSON'S BAG" FOR A DYNAMICAL SYSTEM USING DN-TRACKING METHOD

O.S. Akhmedov, A.I. Sotvoldiyev

One of the main problems of the qualitative theory of dynamical systems is to prove the existence of a closed trajectory [1-5]. To prove its existence even for a concrete two-dimensional dynamical system remains a difficult task. In 2008, A.Azamov proposed a new method called DN-tracking of trajectories of dynamical system, which under certain conditions allows one to rigorously prove the specific properties of dynamical systems (namely, existence of closed trajectory) based on numerical methods [4].

Consider the simplest non-linear dynamical system

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = bx + y, \end{cases} \tag{1}$$

where a and b are real parameters.

This system can be written in a vector form as

$$\dot{z} = f(z), \tag{2}$$

where $z = (x, y)$, $f(z) = (ax + y + x^2,\, bx + y)$.

It is known that almost many dynamical systems are not integrable in explicit way and one can not find its first integral forms, so to find approximate solution of system (2) with given initial condition $z(0) = z_0$ one has to use numerical methods. In spite of the simplicity of system (2) it is not integrable and we call it the simplest model system on the plane.

To solve it numerically we applied an explicit Runge-Kutta method of second order:

$$z_{n+1} = z_n + F(z_n,\ h), \tag{3}$$

where $z_n = (x_n,\ y_n)$, $F(z_n, h) = hf\left(z_n + \dfrac{h}{2} f(z_n)\right)$.

Further an approximate solution z_n obtained by above scheme (3) we call the discrete trajectory of the system (2). Note that one cannot find exact values of discrete solution in spite of the fact that the system (2) is polynomial. Therefore, one has to work with another sequence of vectors ζ_n to be obtained by rounding the values of z_n on a computer. Indeed, in real calculations, due to rounding of the results of arithmetic operations on a computer, instead of the sequence z_n one get another sequence ζ_n, which we call it a numerical trajectory of the system (2) that satisfies the following a recursion formula

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \tilde{F}(\zeta_n,\ h), \tag{4}$$

where $\tilde{F}(\zeta_n, h)$ is the approximate value of $F(\zeta_n,\ h)$ which is calculated on a computer.

It should be noted that one can get the following estimate

$$\left|\tilde{F}(\zeta_n,\ h) - F(\zeta_n,\ h)\right| < \Delta, \tag{4a}$$

where Δ is upper bound of round-off error that produced on a computer after calculation the value of $F(\zeta_n, h)$.

Computer result shows that system (2) has a closed trajectory $z(t)$ of the period $T \in (8.05,\ 8.15)$ passing through near the point $z_0 = (0.6 \pm 0.01,\ 0)$ when $a = -0.8$

and $b = -2$. For other values of parameters a, b one can experimentally establish existence of closed trajectory on a computer.

Let $m_0 = \max_{z\in K} \|f(z)\|$, $m_1 = \max_{z\in K} \left\|\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right\|$, $m_2 = \max_{z\in K} \left\|\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}\right\|$, $h = \frac{T}{N}$, N is a number of division of given interval $[0,\ T]$.

Let $m_0 = \max_{z\in K} \|f(z)\|$, $m_1 = \max_{z\in K} \left\|\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right\|$, $m_2 = \max_{z\in K} \left\|\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}\right\|$, $h = \frac{T}{N}$, N is a number of division of given interval $[0,\ T]$.

Assumption 1. *The trajectory $z(t)$ with given initial condition $z(0) = z_0$ exists on the time interval $0 \leqslant t \leqslant T$ and $z(t) \in K$.*

Theorem 1. *Assumption 1 holds on time interval $\left[0,\ \dfrac{T}{2}\right]$ and*

$$|z(t) - \zeta_n| < 9.2 \cdot 10^{-4} = \varepsilon,$$

where $n = \left[\dfrac{t}{h} + \dfrac{1}{2}\right]$.

The last inequality means that it possible to trace with accuracy ε the trajectory $z(t)$ by means of a sequence of vectors ζ_n, actually computable and stored in the memory of the computing device. Note that in worse case, exact trajectory $z(t)$ may pass on the leftmost point C of the line segment $C'C$, where $C' = \zeta_N + (\varepsilon,\ 0)$, $C = \zeta_N - (\varepsilon,\ 0)$. Therefore, in the next step, we study exact trajectory with initial condition $z_0 = C$ on second segment

$$\left[\frac{T}{2},\ T\right].$$

Since our system (2) is dynamical systems, instead of the segment $\left[\dfrac{T}{2}, T\right]$ one may consider the segment $\left[0,\ \dfrac{T}{2}\right] = [0,\ 4.136]$.

Therefore we proved that the trajectory $z(t)$ starting from the initial point A returns to the left side that point on time interval $[0, T]$ and intersects OX-axis at some point I which placed on the left of point A. So the region B which is bounded by the inner part of the union the lines both trajectory $z(t)$ and line segment IA serves as a "Bendixson's bag".

Refrences

1. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems.* Moscow: Nauka, 1966 (New York: Wiley, 1973).

2. Arnold V. I., Ilyashenko Y. S. *Ordinary differential equations.* In: Advances in Science and Technology: Modern Problems in Mathematics: Fundamental Directions. VINITI, Moscow. 1985. V. 1. P. 7–149.

3. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I.* Ijevsk, Moscow, 2004.

4. Azamov A.A. *DN-Tracking Method to Prove the Existence of Limit Cycles* // Differential Equations and Topology. Proceedings of the International Conference "The 100th Anniversary of Academician Lev Semenovich Pontryagin". Moscow, 2008. P. 87–88.

5. Samatov B. T., Sotvoldiyev A. I. *Intercept problem in dynamic flow field* // Uzbek mathematical journal. Tashkent. 2019. № 2. P. 103–112.

TO TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MATRIX RICCATI EQUATION

I.I. Makovetsky

Consider a Riccati equation of the following form:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + \lambda F(t) \equiv G(t, X, \lambda), \tag{1}$$

where $A, B, Q, F \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

We study a two-point boundary-value problem for (1) in case of

$$MX(0, \lambda) + NX(\omega, \lambda) = 0, \tag{2}$$

where M and N are real $(n \times n)$-matrices.

This equation is prominent in the differential equation theory and its applications [1-8]. Similar problems were considered with the aid of qualitative methods in [1, 4, 6, 7] and on the basis of constructive methods in [3, 5, 8–10].

The present work is a continuation of [10] and deals with a constructive analysis of problem (1), (2) on the basis of the method presented in [3, chapter 1].

We introduce the following notations:

$$D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leqslant \rho\},$$

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|, \quad \delta = \max_t \|Q(t)\|,$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad \mu = \max(\|M\|, \|N\|), \quad \gamma = \|(M + N)^{-1}\|,$$

$$\varphi(\rho) = a_0\rho^2 + a_1\rho + \varepsilon a_2, \quad \varepsilon_0 = \frac{\rho(1 - a_0\rho - a_1)}{a_2}, \quad \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \|X(t, \lambda)\|,$$

where $\rho > 0$, $t \in I$, $\|X\|_{\mathbb{C}}$ is the norm in finite–dimensional Banach algebra $\mathcal{B}(n)$ of continuous $(n \times n)$-matrices-functions; $\|\cdot\|$ is the corresponding norm of matrixes, for example, any of norms given in [11, p. 21], $a_0 = \gamma\mu\delta\omega$, $a_1 = \gamma\mu(\alpha + \beta)\omega$, $a_2 = \gamma\mu\omega h$.

Theorem. *Let the following conditions be fulfilled: 1.* $\det(M + N) \neq 0$, *2.* $d\varphi/d\rho < 1$. *Then for* $|\lambda| \leqslant \varepsilon_0$ *the solution of problem (1), (2) exists in the region* D_ρ, *it is unique and can be presented as a uniform limit of a sequence of matrix functions determined by the recurrent integrated relationship*

$$X_{k+1}(t, \lambda) =$$

$$= (M + N)^{-1}\left\{M\int_0^t G(\tau, X_k(\tau, \lambda), \lambda)d\tau - N\int_t^\omega G(\tau, X_k(\tau, \lambda), \lambda)d\tau\right\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

where $X_0(t)$ *is arbitrary* $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ *– class matrix, which belongs to the sphere* $\|X_0\|_{\mathbb{C}} \leqslant \rho$.

Then the matrix function $X_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, it also satisfy to condition (2). Using condition (2) and induction by k, one can show readily that members of sequence $\{X_k(t)\}_0^\infty$, belong to the sphere $\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \rho$.

Also received estimates

$$\|X - X_k\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{q^k}{1 - q}\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

We have from (4)

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{\|X_1\|_{\mathbb{C}}}{1-q}. \tag{5}$$

From (3) for $X_0 = 0$ we obtain an estimate for X_1:

$$\|X_1\|_{\mathbb{C}} \leqslant \gamma\mu\omega\varepsilon h. \tag{6}$$

Using (6) and (5) we have

$$\|X(t)\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{\gamma\mu\omega\varepsilon h}{1-q(\rho)}.$$

References

1. Erugin N. P. *Reading Book on the General Course of Differential Equations*. Minsk: Nauka and Technica, 1979.
2. Zubov V. I. *Lectures on the Control Theory.* M.: Nauka, 1975.
3. Laptinsky V. N. *Constructive Analysis of Controlled Oscillating Systems*. Minsk: Institute of Mathematics, NAS of Belarus, 1998.
4. Larin V. B. *Control of Walking Apparatuses.* Kiev: Naukova Dumka, 1980.
5. Laptinsky V. N., Makovetsky I. I., Pugin V. V. *Matrix differential equations of Lyapunov and Riccati.* Mogilev: BRU, 2012.
6. Paraev Yu. I. *Lyapunov and Riccati Equations*. Tomsk: State University, 1989.
7. Roytenberg Ia. N. *Automatic Control.* Moscow: Nauka, 1978.
8. Samoilenko A. M., Laptinsky V. N., Kenjebaev K. K. *Constructive Research Approaches of Periodic and Multipoint Boundary Value Problems*. Kiev: Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, 1999.
9. Laptinsky V. N., Makovetsky I. I. *On the two-point boundary-value problem for the Riccati matrix differential equation* // Central European Journal of Mathematics. 2005. V. 3. P. 143–154.
10. Laptinsky V. N., Makovetsky I. I. *On Solvability of the Two-Point Boundary-Value Problem for the Nonlinear Lyapunov Equation* // Herald of the Mogilev State University. 2003. № 2-3(15). P. 176–181.
11. Demidovich B. P. *Lectures on the Mathematical Theory of Stability.* Moscow: Nauka, 1967.

ADDITIONAL DARBOUX POLYNOMIALS OF HAMILTONIAN SYSTEMS

A.F. Pranevich, A.A. Grin, E.V. Musafirov

Consider a canonical polynomial Hamiltonian system with n degrees of freedom

$$\frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} H(q,p), \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\,\partial_{q_i} H(q,p), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

where $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{C}^n$ and $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ are the generalized coordinates and momenta, respectively, the independent variable $t \in \mathbb{R}$, and the Hamiltonian function $H\colon \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$ is a polynomial of degree $h \geqslant 2$. In this paper, we use the Darboux theory of integrability (or the theory of partial integrals) [1, 2] for studying the existence of additional Darboux polynomials (or partial integrals) for the polynomial Hamiltonian system (1) in the phase space $\mathbb{C}^{2n}$.

The Darboux theory was established [1] by the French mathematician J. G. Darboux and provided a link between the existence of first integrals and Darboux polynomials for polynomial autonomous differential systems. Notice that for the polynomial differential systems, the Darboux theory of integrability is one of the best theories for studying the existence of first integrals (see, for example, the monograph [2] and the references therein). In the articles [3 – 5], we applied the Darboux theory of integrability for the polynomial Hamiltonian systems (1). This paper continues studies in this direction and develops approaches of construction additional Darboux polynomials by known Darboux polynomials. For example, the following statement holds.

Theorem. *Suppose the polynomial Hamiltonian system (1) has a Darboux polynomial* $w \in \mathbb{C}[q,p] \setminus \mathbb{C}$ *such that the Poisson bracket*

$$\big[w(q,p), H(q,p)\big] = w(q,p)\, M(q,p) \quad \text{for all } (q,p) \in \mathbb{C}^{2n},$$

where the polynomial $M \in \mathbb{C}[q,p]$ *such that* $\deg M \leqslant h-2.$ *And let a map*

$$\psi = (\psi_1(q,p), \ldots, \psi_n(q,p)), \quad \varphi = (\varphi_1(q,p), \ldots, \varphi_n(q,p)) \ \ \textit{for all } (q,p) \in \mathbb{C}^{2n}$$

be holomorphism of $\mathbb{C}^{2n}$ *to* $\mathbb{C}^{2n}$ *such that the following identities hold*

$$\big[\psi_i(q,p), H(q,p)\big] = \lambda \partial_{\varphi_i} H(\psi,\varphi)\ \Big|_{\substack{\psi = \psi(q,p),\\ \varphi = \varphi(q,p)}}, \quad \big[\varphi_i(q,p), H(q,p)\big] = -\lambda \partial_{\psi_i} H(\psi,\varphi)\ \Big|_{\substack{\psi = \psi(q,p),\\ \varphi = \varphi(q,p)}},$$

where a number $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$ *Then the polynomial*

$$\widetilde{w}(q,p) = \ w(\psi(q,p), \varphi(q,p)) \quad \textit{for all } (q,p) \in \mathbb{C}^{2n}$$

is an additional Darboux polynomial of the Hamiltonian system (1) such that the Poisson brackets

$$\big[\widetilde{w}(q,p), H(q,p)\big] = \lambda\, \widetilde{w}(q,p)\, M(\psi(q,p), \varphi(q,p)) \quad \text{for all } (q,p) \in \mathbb{C}^{2n}.$$

Aknowledgement. Research was supported by Horizon2020-2017-RISE-777911 project.

References

1. Darboux G. *Mémoire sur les équations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degré* // Bull. Sci. Math. 1878. Vol. 2. P. 60–96, 123–144, 151–200.

2. Gorbuzov V. N. *Integrals of Differential Systems.* Grodno: Yanka Kupala State University of Grodno, 2006.

3. Pranevich A., Grin A., Musafirov E. *Multiple partial integrals of polynomial Hamiltonian systems* // Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences. 2021. V. 11. № 2. P. 25–34.

4. Pranevich A., Grin A., Musafirov E., Munteanu F., Sterbeti C. *Conditional partial integrals of polynomial Hamiltonian systems.* In: *Qualitative Theory of Differential Equations* (Eds. I. Kiguradze, R. P. Agarwal, R. Hakl at alias) Tbilisi, I. Javakhishvili Tbilisi State University, 2021. P. 163–167.

5. Pranevich A., Grin A., Musafirov E. *Darboux polynomials and first integrals of polynomial Hamiltonian systems* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2022. V. 109. № 106338. P. 1–12.

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ ПРИЗНАКАХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.С. Баландин

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$(I-S)\dot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

в следующих предположениях и обозначениях:

$$S = \sum_{j=1}^{J} a_j S_{h_j}, \quad (S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geqslant 0, \\ 0, & t-h < 0, \end{cases} \quad (Ty)(t) = \int\limits_0^{\omega} \left(S_\xi y\right)(t)\, dr(\xi),$$

$J \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $h_j, \omega \in \mathbb{R}_+$, функция $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Как известно (см. [1, с. 84, теорема 1.1], [2]), уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s) f(s)\, ds,$$

где $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – *функцией Коши* уравнения (1). Удобно доопределить нулём фундаментальное решение и функцию Коши на отрицательной полуоси.

Функция Коши и фундаментальное решение уравнения (1) связаны соотношением (см. [2])

$$X(t) = (I-S)Y(t).$$

Нас будет интересовать наличие у функции Коши уравнения (1) экспоненциальной оценки

$$|Y(t)| \leqslant M e^{-\gamma t}, \quad M, \gamma > 0. \tag{2}$$

Характеристическая функция уравнения (1) имеет вид:

$$g(p) = p\left(1 - \sum_{j=1}^{J} a_j e^{-p h_j}\right) - \int\limits_0^{\omega} e^{-p\xi}\, dr(\xi), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1. *Функция Коши уравнения (1) имеет оценку (2) тогда и только тогда, когда оператор $I - S$ имеет в пространстве L_p обратный и все нули функции g лежат слева от мнимой оси.*

Теорема 1 позволяет устанавливать эффективные, т.е. выраженные в терминах параметров исходного уравнения, признаки экспоненциальной устойчивости. В статье [3] была построена область экспоненциальной устойчивости для уравнения

$$(I - aS_h)\dot{x}(t) + (bI - cS)x(t) = f(t),$$

в работе [4] – для уравнения

$$(I - aS_1 - bS_2)\dot{x}(t) = c(S_1x)(t) + f(t).$$

В статье [5] был предложен способ исследования экспоненциальной устойчивости уравнений нейтрального типа с помощью сведения к изучению экспоненциальной устойчивости уравнения запаздывающего типа и таким образом были найдены новые признаки.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t) + bx(t) + cx(t-1) + k\int\limits_{t-1}^{t} x(s)\,ds = f(t), \tag{3}$$

где a, b, c, $k \in \mathbb{R}$.

Введём в системе координат $Ouvw$ поверхность

$$\Gamma = \left\{ u = -2\theta \operatorname{ctg}\theta + v, \quad w = \frac{\theta(2\theta - v\sin 2\theta)}{\sin^2\theta}, \quad \theta \in [0, \pi) \right\}.$$

Поверхность Γ и плоскость $u + v + w = 0$ ограничивают область D, содержащую положительную полуось Ou (см. рис. 1).

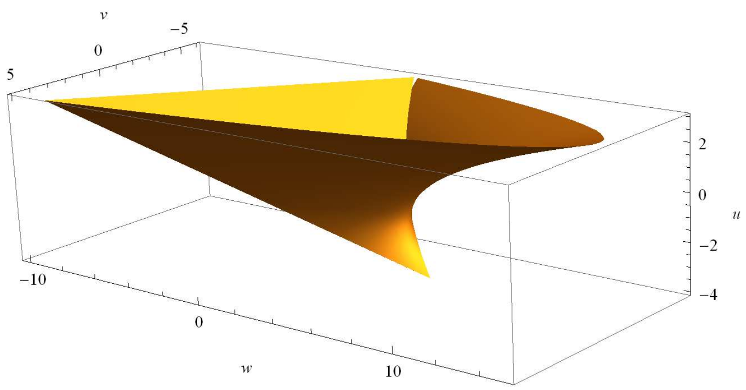


Рис. 1. Область D.

Теорема 2. *Функция Коши уравнения (3) имеет оценку (2) тогда и только тогда, когда* $|a| < 1$ *и точка* $\left\{ \dfrac{b - ac}{1 - a^2}, \dfrac{c - ab}{1 - a^2}, \dfrac{k}{1 + a} \right\}$ *принадлежит области* D.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028).

Литература

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1991.

2. Баландин А. С. *О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Прикладная математика и вопросы управления. 2018. № 1. С. 13–25.

3. Баландин А. С., Малыгина В. В. *Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Математические труды. 2020. Т. 23. № 2. С. 3–49.

4. Баландин А. С. *Об устойчивости некоторых автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Сборник трудов XII Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2019)», Воронеж, 2019. С. 59–63.

5. Баландин А. С. *Редукция дифференциальных уравнений нейтрального типа к уравнениям запаздывающего типа* // Динамические системы. 2020. Т. 10(38). № 1. С. 7–22.

КРИТЕРИЙ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.И. Булатов

Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где x – n-вектор; u – r-вектор; A и B – соответственно $(n \times n)$ и $(n \times r)$-матрицы.

Систему (1) считаем *стабилизируемой*, если найдётся такая $r \times n$-матрица Q, что замыкание этой системы управлением

$$u = Qx$$

приводит к асимтотически устойчивой системе

$$\dot{x} = (A + BQ)x.$$

Пусть в матрице

$$H = [B;\ AB;\ \ldots;\ A^{n-1}B] \tag{2}$$

ненулевой минор k-го порядка, где $k = \operatorname{rank} H,$ расположен в соответствующих строках и столбцах этой матрицы с номерами $i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_k$ и $j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_k$.

Вычислим определитель n-го порядка $p(\lambda),$ получаемый из определителя λ-матрицы $D(\lambda) = \lambda E - A$ заменой столбцов с номерами $i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_k$ на выделенные в матрице (2) столбцы с номерами $j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_k$.

На основании [1] доказывается следующая

Теорема. *Система (1) стабилизируема тогда и только тогда, когда $p(\lambda)$ является многочленом Гурвица.*

Литература

1. Булатов В. И. *Об одном способе вычисления максимально инвариантного многочлена спектра линейных стационарных систем управления* // Тез. докл. XVII Междунар. науч. конф. по дифференц. уравн. «Еругинские чтения-2017». Минск. 16-20 мая 2017 г. Ч. 1. С. 68–69.

О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОГО ОБЪЕКТА

М.Н. Гончарова

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2 x = u, \tag{1}$$

где $\omega > 0$, на управление наложено ограничение $u \in [-\varepsilon_1; \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$.

Построим множество управлемости $Y(t)$ этого объекта в точку $O(0;0)$, то есть множество всех точек фазового пространства, из которых можно перейти на отрезке времени $[t;t_1]$ в начало координат при всевозможных допустимых управлениях. Так как конечное множество состоит из одной точки, то сначала вычислим опорную функцию множества $Y(t)$, а затем восстановим компакт $Y(t)$ по его опорной функции.

С помощью замены $x = y_1$, $\dot{x} = \omega y_2$ уравнение (1) сведем к нормальной системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \omega y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\omega y_1 + v, \end{cases} \tag{2}$$

в которой вектор управления $(o; v)$ будет принимать значения из отрезка

$$V = \Big\{(v_1; v_2) \in R^2 \,|\, v_1 = 0, -\frac{\varepsilon_1}{\omega} \leqslant v_2 \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\omega}\} =$$

$$= \{(v_1; v_2) \in R^2 \,|\, v_1 = 0, -l_1 \leqslant v_2 \leqslant l_2\Big\}. \tag{3}$$

Экспоненциал e^{At} матрицы системы (2) есть матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

Опорная функция множества (3) имеет вид $c(V, \psi) = \dfrac{l_2 - l_1}{2}\psi_2 + \dfrac{l_2 + l_1}{2}|\psi_2|$.

Используя формулу опорной функции множества управляемости [1] и проведя вычисления, получим

$$c(Y(t), \psi) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\tau\omega} \left(\frac{l_2 - l_1}{2}(\psi_1 \sin\alpha + \psi_2 \cos\alpha) + \frac{l_2 + l_1}{2}|\psi_1 \sin\alpha + \psi_2 \cos\alpha|\right) d\alpha,$$

где $\tau = t_1 - t$ – длина отрезка $[t; t_1]$. Произвольный вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, принадлежащий сфере радиуса 1 с центром в начале координат, представим в полярных координатах

$$\psi_1 = \cos\beta, \quad \psi_2 = \sin\beta, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

Тогда для опорной функции $c\big(Y(t), \psi\big)$ получим выражение

$$c\big(Y(t), \psi\big) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\tau\omega} \left(\frac{l_2 - l_1}{2}\sin(\alpha + \beta) + \frac{l_2 + l_1}{2}|\sin(\alpha + \beta)|\right) d\alpha. \tag{5}$$

Вычисление интеграла (5) зависит от длины интервала $\tau\omega$. При выполнении неравенств $0 \leqslant \tau\omega \leqslant \pi$ вычисление интеграла (5) распадается на четыре случая в зависимости от значения параметра β. Получаем

$$c\big(Y(t), \psi\big) = \begin{cases} \dfrac{l_2}{\omega}(1 - \cos\tau\omega)\cos\beta + \dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\sin\beta, \ 0 \leqslant \beta \leqslant \pi - \tau\omega, \\ \dfrac{l_1 + l_2}{\omega} + \left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{l_1}{\omega}\cos\tau\omega\right)\cos\beta - \dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\sin\beta, \ \pi - \tau\omega < \beta \leqslant \pi, \\ \dfrac{l_1}{\omega}(\cos\tau\omega - 1)\cos\beta - \dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\sin\beta, \ \pi < \beta \leqslant 2\pi - \tau\omega, \\ \dfrac{l_1 + l_2}{\omega} - \left(\dfrac{l_1}{\omega} + \dfrac{l_2}{\omega}\cos\tau\omega\right)\cos\beta + \dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\sin\beta, \ 2\pi - \tau\omega < \beta \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Разобъем вектора (4) плоскости на сектора следующим образом. К сектору I отнесем векторы, для которых выполняются неравенства $0 \leqslant \beta \leqslant \pi - \tau\omega$, к сектору II – векторы, для которых выполняются неравенства $\pi - \tau\omega < \beta \leqslant \pi$, к сектору III – векторы, для которых выполняются неравенства $\pi < \beta \leqslant 2\pi - \tau\omega$ и к сектору IV – векторы, для которых выполняются неравенства $2\pi - \tau\omega < \beta \leqslant 2\pi$.

Таким образом, в зависимости от того, в какой сектор попадает вектор ψ, заданный формулами (3), получаем разные выражения для опорной функции. Учитывая формулы (3) и тот факт, что $||\psi|| = 1$, окончательно получаем формулу

$$c\big(Y(t),\psi\big) = \begin{cases} \dfrac{l_2}{\omega}(1-\cos\tau\omega)\psi_1 + \left(\dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\right)\psi_2, \ \psi \in I, \\ \dfrac{l_1+l_2}{\omega}||\psi|| + \left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{l_1}{\omega}\cos\tau\omega\right)\psi_1 - \left(\dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\right)\psi_2, \ \psi \in II, \\ \dfrac{l_1}{\omega}(\cos\tau\omega - 1)\psi_1 - \left(\dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\right)\psi_2, \ \psi \in III, \\ \dfrac{l_1+l_2}{\omega}||\psi|| - \left(\dfrac{l_1}{\omega} + \dfrac{l_2}{\omega}\cos\tau\omega\right)\psi_1 + \left(\dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\right)\psi_2, \ \psi \in IV. \end{cases}$$

Когда вектор ψ пробегает I сектор, то получаем опорную функцию точки с координатами $\left(\dfrac{l_2}{\omega}(1-\cos\tau\omega), \dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\right)$, когда вектор ψ пробегает II сектор, то это – опорная функция круга радиуса $\dfrac{l_1+l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{l_1}{\omega}\cos\tau\omega, -\dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\right)$, когда вектор ψ пробегает III сектор, то это – опорная функция точки $\left(\dfrac{l_1}{\omega}(\cos\tau\omega - 1), -\dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\right)$ и, наконец, когда вектор ψ пробегает IV сектор, то это – опорная функция круга радиуса $\dfrac{l_1+l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(-\dfrac{l_1}{\omega} - \dfrac{l_2}{\omega}\cos\tau\omega, \dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\right)$.

В результате получаем, что искомое множество управляемости является пересечением двух кругов: круга радиуса $\dfrac{l_1+l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{l_1}{\omega}\cos\tau\omega, -\dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\right)$ и круга радиуса $\dfrac{l_1+l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(-\dfrac{l_1}{\omega} - \dfrac{l_2}{\omega}\cos\tau\omega, \dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\right)$. При $\tau\omega = \pi$ опорная функция $c\big(Y(t),\psi\big)$ принимает постоянное значение для секторов II и IV, сектора I и III вырождаются. Таким образом, имеем, что при $\tau\omega = \pi$ множество управляемости является кругом радиуса $\dfrac{l_1+l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(-\dfrac{l_1}{\omega} + \dfrac{l_2}{\omega}, 0\right)$.

Построив множество управляемости, можно провести более подробный анализ поведения изучаемого объекта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ "Конвергенция—2025", задание 1.2.04.4).

Литература

1. Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. *Оптимальное управление. Линейная теория и приложения.* М.: МАКС Пресс, 2007.

ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЕЕ РЕДУЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ

В.В. Горячкин, В.В. Крахотко

Пусть задана система управления

$$x(t+1) = Ax(t) + B(t)u(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$; A, B – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Предположим, что вектор $x(t)$ измеряется полностью и управление задано в виде

$$u(t) = Cx(t), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где C – постоянная $(r \times n)$-матрица. Тогда для замкнутой системы

$$x(t+1) = (A + BC)x(t)$$

обратная связь (2) обеспечивает асимптотическую устойчивость, если

$$\|A + BC\| < 1. \tag{3}$$

Рассмотрим задачу стабилизации объекта (1) с установленной матрицей C, у которой часть столбцов примем равным нулю. Требуется найти тот максимальный по числу набор нулевых столбцов матрицы C, при которых сохраняется свойство стабилизируемости замкнутой системы.

Такую задачу стабилизации будем интерпретировать как задачу стабилизации исходного объекта управления на основе ее редуцированной модели.

Пусть D – диагональная $(n\times n)$-матрица с элементами d_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$, причем элемент d_{ii} может принимать одно из двух значений 0 или 1. Тогда, очевидно, в произведении $CDx(t)$ будут задействованы только те координаты вектора $x(t)$, которые соответствуют единичным элементам матрицы D. Это свойство так же переносится и на произведение $BCDx(t)$.

Потребуем, чтобы элементы матрицы D были подобраны так, чтобы замкнутая система оставалась стабилизируемой и выполнялось достаточное условие асимптотической устойчивости замкнутой системы

$$\|A + BCD\| < 1. \tag{4}$$

Введем обозначения: a_i – столбцы матрицы A; h_i – столбцы матрицы BC; φ_i – столбцы матрицы $\Phi = A + BCD$. Очевидно $\varphi_i = a_i + h_i d_{ii}$.

Матрица C была выбрана так, что выполняется достаточное условие (4), которое во введенных обозначениях эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i' \varphi_i < 1. \tag{5}$$

Ясно, что для построения редуцированной модели необходимо найти тот минимальный набор элементов матрицы D с единицами на главной диагонали, при котором сохраняется неравенство (5).

Приведем алгоритм нахождения нулевых столбцов матрицы C.

1. Положим для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ $d_{ii} = 1$ $(D = E)$.
2. Вычислим n скалярных произведений $s_i = \varphi_i' \varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
3. Подсчитаем числа $\alpha_i = a_i' a_i - s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
4. Заполним таблицу P, состоящую из четырех столбцов и n строк по правилу:

   в первый столбец заносим нули; во второй столбец номера индексов i, начиная с 1 до n; в третий и в четвертый столбцы занесем значения s_i и α_i согласно номеру индекса во втором столбце соответственно.
5. Выполним сортировку строк таблицы P по значениям третьего столбца в порядке возрастания.
6. Вычислим сумму всех элементов третьего столбца таблицы P. Пусть p_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, 3, 4$, – элементы таблицы P и $y = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{i3} = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i$.
7. Положим $i = 1$.
8. Вычислим $y = y + p_{i4}$.
9. Если $y \geqslant 1$, то переходим к шагу 14.
10. Если $y < 1$, то $p_{i1} = 1$.
11. Пусть $i = i + 1$.
12. Если $i \leqslant n$, то переходим к шагу 8.
13. Если $i > n$, то переходим к шагу 14.
14. Элементы первого столбца таблицы P определяют во втором столбце номера нулевых столбцов в матрице C.

Полученный результат подтверждается хорошо известным методом построения систем управления реальными объектами высокого порядка и фактом их стабилизации при использовании лишь редуцированных моделей [1, с. 74].

Заметим, если неравенство (3) выполняется с некоторым "запасом", то это в принципе открывает возможность построения стабилизирующего управления на основе редуцированной модели объекта.

Если рассмотреть процедуру задания искомой матрицы C в управлении (2) так, чтобы выполнялось достаточное условие (3), то можно воспользоваться экстремальным свойством псевдообратной матрицы. То есть существует одна и только одна матрица, которая минимизирует евклидову норму [2, гл. 1]: $\min\limits_{C} \|A + BC\| = \|A - BB^{+}A\|$. Это означает, что если взять $C = -B^{+}A$, и норма $\|A - BB^{+}A\| < 1$, то система (1) стабилизируема, т.е. имеется возможность построения ее редуцированной модели по приведенному выше алгоритму.

Литература

1. Кунцевич В. М. *Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации.* Киев: Наук. думка, 2006.

2. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М: Наука, 1967.

МНОГОКРАТНО ЗАМЫКАЕМЫЕ ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н.М. Дмитрук

Для линейной системы управления с возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{1}$$

рассматривается задача о минимизации гарантированного значения терминального критерия качества $\max_{w(\cdot)} c'x(T)$ при условии попадания траектории системы (1) в момент времени T с гарантией на терминальное множество

$$X_T = \{x \in \mathbb{R}^n : g_{\min} \leqslant Hx \leqslant g_{\max}\}.$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}\}$ – управление, $w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}^p : ||w||_\infty \leqslant w_{\max}\}$ – неизвестное возмущение,

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times r},\ M \in \mathbb{R}^{n\times p},\ H \in \mathbb{R}^{m\times n},\ g_{\min},\ g_{\max} \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n –$$

заданные матрицы и векторы.

Сделаем предположение о том, что система (1) будет замкнута [1] в моменты времени $t_j \in \{1, 2, \ldots, T-1\}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$. Предполагается (см. [2, 3]), что в каждый момент замыкания t_j можно будет: 1) измерить текущее состояние $x^*(t_j)$ системы; 2) в зависимости от измеренного $x^*(t_j)$ выбрать новое управление $u_j(t|\, t_j, x^*(t_j))$, $t \in \Delta_j = \{t_j, t_j{+}1, \ldots, t_{j+1}{-}1\}$. Здесь x^* зависит от конкретной реализации возмущения в процессе управления.

Обозначим $x(t_{j+1}|\, t_j, x_j, u_j, w_j)$ – состояние системы (1) в момент t_{j+1} при начальном состоянии $x(t_j) = x_j$, управлении $u_j(t|\, t_j, x_j)$ и возмущении $w_j(t)$, $t \in \Delta_j$; $X(t_{j+1}|\, t_j, x_j, u_j) = \{x(t_{j+1}|\, t_j, x_j, u_j, w_j)\colon w_j(t) \in W,\ t \in \Delta_j\}$.

Определим стратегию управления $\pi_N(0, x_0)$ с N моментами замыкания $t_1, \ldots$ $\ldots, t_N$ рекуррентно на основе стратегий $\pi_{N-j}(t_j, x_j)$, с $N-j$ моментами замыкания, $j = N-1, N-2, \ldots, 1$:

$$\begin{aligned}
&\pi_1(t_{N-1}, x_{N-1}) = \{u_{N-1}(\cdot|\, t_{N-1}, x_{N-1}); u_N(\cdot|\, t_N, x_N), x_N \in X(t_N|\, t_{N-1}, x_{N-1}, u_{N-1})\},\\
&\pi_{N-j}(t_j, x_j) = \{u_j(\cdot|\, t_j, x_j); \pi_{N-j-1}(t_{j+1}, x_{j+1}), x_{j+1} \in X(t_{j+1}|\, t_j, x_j, u_j)\},\\
&\pi_N(0, x_0) = \{u_0(\cdot|0, x_0); \pi_{N-1}(t_1, x_1), x_1 \in X(t_1|0, x_0, u_0)\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Допустимость стратегии (2) также определим рекуррентно. Для этого введем множества X_{N+1}, X_N : $X_{N+1} = X_T$, X_N – множество точек x_N, для которых на Δ_N существуют оптимальные гарантирующие программы $u_N^0(t|\, t_N, x_N)$, $t \in \Delta_N$, т.е. существует решение задачи

$$V_N(t_N, x_N) = \min_{u_N} \max_{w_N} c'x(T|\, t_N, x_N, u_N, w_N), \quad X(T|\, t_N, x_N, u_N) \subseteq X_{N+1}. \tag{3}$$

На Δ_N определим допустимую стратегию

$$\pi_1(t_{N-1}, x_{N-1}) = \big\{u_{N-1}(\cdot|\, t_{N-1}, x_{N-1});\ u_N^0(\cdot|\, t_N, x_N),\ x_N \in X(t_N|\, t_{N-1}, x_{N-1},\ u_{N-1}^0)\big\}$$

с одним моментом замыкания t_N, где $u_{N-1}(t|\, t_{N-1}, x_{N-1})$, $t \in \Delta_{N-1}$, таково, что $X(t_N|\, t_{N-1}, x_{N-1}, u_{N-1}) \subseteq X_N$, см. также результаты для стратегии с одним замыканием в [3]. Множество всех x_{N-1}, для которых существует допустимая стратегия $\pi_1(t_{N-1}, x_{N-1})$ обозначим X_{N-1}.

Продолжая, определим множества $X_{N-2},\dots,X_0$ и управления $u_{N-2}(\cdot|\,t_{N-2},x_{N-2})$, $\dots$, $u_0(\cdot|0,x_0)$ в допустимой стратегии (2) согласно следующим правилам:

$$X_j=\bigl\{x_j\in\mathbb{R}^n:\ \exists u_j(\cdot|\,t_j,x_j),\ X(t_{j+1}|\,t_j,x_j,u_j)\subseteq X_{j+1}\bigr\},\quad j=0,1,\dots,N-1,$$

т.е. множество X_j составим из всех точек x_j, для которых существует управление $u_j(t|\,t_j,x_j)$, $t\in\Delta_j$, переводящее систему (1) с гарантией на множество X_{j+1}.

Оптимальная стратегия $\pi^0_N(0,x_0)$ определяется управлениями $u^0_j(t|\,t_j,x_j)$, $t\in\Delta_j$, которые, следуя рассуждениям динамического программирования, находятся из аналога уравнения Беллмана

$$V_j(t_j,x_j)=\min_{u_j}\max_{w_j}V_{j+1}\bigl(x(t_{j+1}|\,t_j,x_j,u_j,w_j)\bigr),\quad j=N-1,\dots,0, \tag{4}$$

где $V_N(t_N,x_N)$ определяется согласно (3).

Цель доклада — управление системой (1) по принципу замкнутого контура. Поэтому на основе оптимальных стратегий (2) определим так называемую оптимальную многократно замыкаемую обратную связь [1] для системы (1). Для этого погрузим рассматриваемую задачу в семейство задач, в котором процесс управления стартует в момент времени τ из состояния $z\in\mathbb{R}^n$. Оптимальную стратегию задачи семейства для позиции (τ,z) при $\tau\in\Delta_j$ обозначим

$$\pi^0_{N-j}(\tau,z)=\bigl\{u_j(\cdot|\,\tau,z);\ \pi_{N-j-1}(t_{j+1},x_{j+1}),\ x_{j+1}\in X(t_{j+1}|\,t_j,x_j,u_j)\bigr\}.$$

Здесь $u^0_j(\cdot|\,\tau,z)=\bigl(u^0_j(t|\,\tau,z)\,,\ t\in\{\tau,\tau+1,\dots,t_{j+1}-1\}\bigr)$, является решением задачи

$$V_j(\tau,z)=\min_{u_j}\max_{w_j}V_{j+1}\bigl(x(t_{j+1}|\,\tau,z,u_j,w_j)\bigr). \tag{5}$$

Тогда оптимальная замыкаемая обратная связь имеет вид

$$u^0(\tau,z)=u^0_j(\tau|\,\tau,z),\quad \tau\in\Delta_j,\quad j=0,1,\dots,N.$$

Для построения реализации оптимальной многократно замыкаемой обратной связи $u^*(\tau)=u^0\bigl(\tau,x^*(\tau)\bigr)$, $\tau=0,1,\dots,T-1$, в реальном времени [1] вдоль реализующейся в каждом конкретном процессе управления траектории $x^*(\tau)$, $\tau=0,1,\dots,T-1$, необходимо быстро строить оптимальные управления $u^0_j\bigl(\cdot|\,\tau,x^*(\tau)\bigr)$, т.е. решать задачи вида (5).

Решение задачи (5) основано на построении внешних аппроксимаций многогранников $X_j(\alpha)=\{x_j:V_j(t_j,x_j)\leqslant\alpha\}$, $j=1,\dots,N$, (см. также [3]). Для этого выберем (не зависящую от α и j) систему векторов $p_k\in\mathbb{R}^n$, $k\in K$, $||p_k||=1$, и составим из них матрицу $P\in\mathbb{R}^{|K|\times n}$. Пусть $f_j(\alpha)=\bigl(f_{jk}(\alpha),k\in K\bigr)$:

$$f_{jk}(\alpha)=\max p'_kx_j,\quad x_j\in X_j(\alpha). \tag{6}$$

Основной результат работы заключается в обосновании аффинной зависимости решений задач (6) от α:

$$f_j(\alpha)=f_j(0)+\lambda_j\alpha,$$

где $\lambda_j=(\lambda_{jk},\,k\in K)$ находится из решения задачи линейного программирования (см. идею доказательства в [3]).

Тогда для нахождения управления $u_j^0(\cdot|\,\tau, x^*(\tau))$ (приближенно) получим задачу

$$V_j(\tau, z) = \min_{u_j,\alpha} \alpha,$$
$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_j(t), \quad x(\tau) = x^*(\tau), \quad u_j(t) \in U, \; t \in \{\tau, \tau+1, \ldots, t_{j+1}-1\}, \tag{7}$$
$$Px(t_{j+1}) \leqslant f_{j+1}(0) + \lambda_{j+1}\alpha - \gamma_j,$$

где $\gamma_j = (\gamma_{jk}, k \in K)$: $\gamma_{jk} = w_{\max} \sum_{t\in\Delta_j} ||p_k' A^t M||_1$. Очевидно, задача (7) сводится к задаче линейного программирования, что выгодно отличает полученный результат от работы [1].

В докладе будет показано, как осуществляется коррекция предыдущего решения $u_0^0(\cdot|\,\tau-1, x^*(\tau-1))$ для быстрого построения текущего решения $u_0^0(\cdot|\,\tau, x^*(\tau))$.

Литература

1. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью* // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 2. С. 265–286.

2. Kostina E., Kostyukova O. *Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances* // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2009. V. 19. № 17. P. 1940–1958.

3. Kastsiukevich D.A., Dmitruk N.M. *A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem* // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2021. № 2. P. 38–49.

УПРАВЛЕНИЕ И НАБЛЮДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.П. Жабко, В.С. Жигалов

1. Введение. В работе рассматривается система дифференциально–разностных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(\alpha t) + f(t), \tag{1}$$

где A_0, A_1 – $(n \times n)$-матрицы, $\alpha \in (0,1)$, $f(t)$ – заданная на $[t_0, T]$ кусочно-непрерывная функция.

Зададим наблюдение

$$y(t) = Cx(t), \tag{2}$$

где $y(t)$ -– известная вектор-функция размерности r, C – $(r \times n)$-матрица.

Определение 1. Система $(1),(2)$ называется *полностью наблюдаемой на промежутке* $[t_0, T]$, если по значениям вектора наблюдений $y(t)$ на $[t_0, T]$ можно однозначно восстановить движение системы на начальном множестве — вектор $\phi(t)$.

2. Предварительные рассуждения. Рассмотрим случай вырожденной матрицы A_1. Существует такая матрица D, что $DA_1 = 0$. Если $DA_0 = \Lambda D$, то после замены $Dx = z$ получаем систему

$$\dot{z} = \Lambda z + Df(t). \tag{3}$$

Система (3) – ненаблюдаемая часть системы (1). Данные рассуждения применимы для любых начальных точек t_0. Из чего следует

Теорема 1. *Если матрица* A_1 *– вырожденная, и для некоторой ненулевой матрицы* D *выполнены условия* $DA_1 = 0$ *и* $DA_0 = \Lambda D$, *то система (1), (2) не является полностью наблюдаемой.*

Далее считаем матрицу A_1 невырожденной.

3. Построение начальной функции. Сделаем в системе (1), (2) замену

$$x(t) = e^{A_0 t} z(t).$$

Получим

$$\begin{cases} e^{A_0 t}\dot z = A_1 \phi(\alpha t) + f(t), \\ y(t) = e^{A_0 t} z. \end{cases} \tag{4}$$

Из первого уравнения системы (4) получаем равенство

$$\phi(\alpha t) = A_1^{-1}[e^{A_0 t}\dot z - f(t)],$$

где возникает член $e^{A_0 t}\dot z$. Из второго уравнения (7) получаем

$$\dot y(t) = A_0 e^{A_0 t} z + e^{A_0 t}\dot z,$$

откуда можно выразить $e^{A_0 t}\dot z$.

Замечание. Поскольку при дифференцировании наблюдения могут возникать погрешности, то приближаем функцию $\dot x_{\text{ист}}(t)$ равенством

$$\dot x_{\text{ист}}(t) \approx \frac{1}{K\delta}\sum_{j=1}^{K}[x(t-2j\delta) - x(t-(2j-1)\delta)],$$

где δ – малая величина, K – целое.

4. Случай неполного наблюдения. Предположим, что матрица $C \neq E$. Введем вспомогательную систему уравнений

$$\dot z(t) = A_0 z(t) + A_1 z(\alpha t) + L_0\big(Cz(t) - y(t)\big) + L_1\big(Cz(\alpha t) - y(\alpha t)\big), \tag{5}$$

которую назовем *асимптотическим наблюдателем.*

Теорема 2. *Если существуют такие матрицы* L_0 *и* L_1, *что матрица* $(A_0 + L_0 C)$ *– гурвицева, а матрица* $(A_0 + L_0 C)^{-1}(A_1 + L_1 C)$ *имеет все собственные числа в единичном круге, то справедливо предельное соотношение* $z(t) \to x(t)$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство следует из [1]. Далее начальная функция строится по изложенному в п. 3 алгоритму с заменой вектора $x(t)$ его асимптотическим приближением $z(t)$.

5. Программное асимптотическое управление. Рассмотрим систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(\alpha t) + B\nu + f(t), \tag{6}$$

где ν – управление.

Определение 2. Будем говорить, что система (6), (2) *асимптотически управляема на промежутке* $[t_0, T]$, $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$, если для любой векторной функции $\psi(t) \in C[T, \alpha^{-1}T]$ существует такое управление $\nu(t, y)$, при котором решение $x(t)$ системы (6) удовлетворяет условию $x(t) \to \hat x(t)$, $t \to \infty$. Здесь $\hat x(t)$ – решение системы (1) с начальной функцией $\hat x(t) = \psi(t)$, $t \in [T, \alpha^{-1}T]$.

Теорема 3. *Предположим, что решение* $\hat x(t)$ *определено на промежутке* $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$. *Определим функцию* $\hat y(t) = C\hat x(t)$. *Пусть матрицы* L_0, L_1 *удовлетворяют условиям Теоремы 2, а матрицы* F_0, F_1 *такие, что матрица* $(A_0 + F_0 C)$ *–*

гурвицева и у матрицы $(A_0+F_0C)^{-1}(A_1+F_1C)$ *все собственные числа лежат в единичном круге. Тогда решением системы (6) и системы:*

$$\dot{z}(t)=A_0z(t)+A_1z(\alpha t)+L_0(Cz(t)-\hat{y}(t))+L_1(Cz(\alpha t)-\hat{y}(\alpha t)) \qquad (7)$$

является

$$\nu(t)=F_0w(t)+F_1w(\alpha t),$$
$$w(t)=z(t)+Pz(t)+Qz(\alpha t).$$

Матрицы P и Q выбираются согласно работе [2].

Заключение. В работе предложена теорема, дающая необходимое условие полной наблюдаемости систем вида (1), (2) и предложен метод построения приближения движения дифференциально–разностной системы с использованием асимптотического наблюдателя.

Литература

1. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. *Устойчивость дифференциально–разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 316–325.

2. Zhabko A. P., Tikhomirov O. G., Chizhova O. N. *The Prediction Scheme to the Linear Systems with Linearly Increasing and Constant Delays* // Fourth International Conference Dedicated to the Memory of Professor Vladimir Zubov, N. Smirnov, and A. Golovkina eds. Stability and Control Processes, 2020. P. 207–213.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В задачах с сингулярными возмущениями эти динамические системы являются жесткими, и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Применение асимптотических методов позволяет не только избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, но и свести исходную задачу оптимального управления к решению задач меньшей размерности.

В основе применяемой методики исследования лежит идея конечномерной параметризации оптимальных управлений. Для многих задач оптимизации динамических систем можно указать конечномерные элементы (назовем их определяющими), по которым легко восстанавливается решение задачи, причем в возмущенных задачах, что очень существенно, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. К определяющим элементам, в частности, относятся точки переключения релейных управлений, начальные и конечные моменты особых и квазиособых режимов, множители Лагранжа, длительность процесса (в том случае, когда она не задана). С помощью принципа максимума и условий допустимости управлений для определяющих элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно составить систему конечных уравнений

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) = 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{1}$$

где μ -– малый параметр. Назовем эти уравнения, как и их корни, определяющими. Формируются уравнения (1) путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются возмущенными. Применяя метод пограничных функций, можно разложить функции $F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu)$, $i = \overline{1,k}$, по степеням малого параметра

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) \sim F_{i0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \mu F_{i1}(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \ldots, \quad i = \overline{1,k},$$

а затем в условиях применимости теоремы о неявной функции методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику решения системы (1). Для построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка достаточно заменить неизвестные определяющие элементы $a_i(\mu)$, $i = \overline{1,k}$, их асимптотическими приближениями соответствующего порядка. Основная трудность при реализации описанной схемы состоит в нахождении старших коэффициентов разложения определяющих элементов, т.е. корней системы нулевого приближения

$$F_{i0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0, \quad i = \overline{1,k}. \tag{2}$$

Оказывается, что если же исходная задача оптимального управления является сингулярно возмущенной, то корнями системы (2), как правило, будут определяющие элементы двух задач меньшей размерности. Одной из них является вырожденная задача, а вторая подбирается в результате анализа системы (2), что представляет собой неформальный этап исследования. Описанный подход удобен для численной реализации, поскольку при его применении дело сводится к разложению конечномерных элементов.

В докладе представлен обзор результатов, полученных для задач оптимизации сингулярно возмущенных систем в Минской школе по оптимальному управлению.

ПСЕВДОПРОЛОНГАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Б.С. Калитин

В работе Т. Ура [1] представлено перспективное направление развития качественной теории устойчивости движения – теория пролонгаций. В дальнейшем эта теория использовалась в работах Ж.П. Аусландера, П. Сейберта, А. Пэльчера, О. Хайека и др. (см. [2-11]). Напомним необходимые обозначения и определения [8, 10]: $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система на метрическом пространстве X с метрикой $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$; $B(N, \alpha) = \{x \in X : d(N, x) < \alpha\}$ для $\alpha > 0$; (x_n) – последовательность точек в X; $L^+(x)$ – множество ω-(α-)предельных точек для $x \in X$; $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$ – фазовое отображение, $\pi(x,t) = xt$.

Определение 1. Пусть $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система и M – замкнутое подмножество X. Будем говорить, что M :
-*устойчивое*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0) : \ d(M, xt) < \varepsilon \quad \forall t \geqslant 0;$$

-притягивающее (*слабо притягивающее*), если область притяжения $A^+(M)$ (область слабого притяжения $A^+_\omega(M)$) является окрестностью M;
-асимптотически устойчивое, если оно устойчивое и притягивающее.

Определение 2. Полудинамическая система $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ называется *асимптотически компактной на множестве* W, если для любой пары последовательностей $(x_n) \subset W$ и $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ таких, что $x_n[0, t_n] \subset W$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t_n \to +\infty$, последовательность $(x_n t_n)$ относительно компактна.

Определение 3. [9, с. 24] Пусть $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система на метрическом пространстве X. *Пролонгацией точки* $x \in X$ называется отображение $D^+ : X \to 2^X$, определяемое формулой

$$D^+(x) = \big\{y \in X : \exists (x_n) \subset X, \exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+ \text{ такие, что } x_n \to x \text{ и } x_n t_n \to y\big\}.$$

Если M – замкнутое множество, то $D^+(M) = \bigcup\limits_{m \in M} D^+(m)$ называется *пролонгацией множества* M.

Определение 4. [11] Пусть $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система на метрическом пространстве X. *Псевдопролонгацией точки* $x \in X$ называется отображение $\sigma^+ : X \to 2^X$, определяемое формулой

$$\sigma^+(x) = \big\{y \in X : \exists (x_n) \subset X,\ \exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+ \text{ такие, что } x_n \to x \text{ и } x_n t_n = y\ \forall n \in \mathbb{N}\big\}. \quad (1)$$

Если M – замкнутое множество, то $\sigma^+(M) = \bigcup\limits_{m \in M} \sigma^+(m)$ называется *псевдопролонгацией множества* M.

Очевидно, что $\sigma^+(M) \subset D^+(M)$.

Теорема 1. *Пусть* $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ *– полудинамическая система на метрическом пространстве* X *и* $M \subset X$ *– замкнутое множество. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) $M \subset \sigma(M)$;
2) *если* M *положительно инвариантно, то* $\sigma(M)$ *положительно инвариантно, а множество* $\sigma(M) \backslash M$ *инвариантно и для точек* $x \in M$ *и* $y \in X \backslash M$ *в условии (1)* $t_n \to +\infty$;
3) *если* M *связно, компактно и инвариантно, а* $\sigma(M)$ *компактно, то* $\sigma(M)$ *связно.*

Определение 5. [11, с. 32] Пусть $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система на метрическом пространстве X и $M \subset X$ – замкнутое инвариантное множество. Точка x из X называется *слабо эллиптической точкой* M, если $L^+(x) \bigcap M \neq \emptyset$ и $L^-(x) \bigcap M \neq \emptyset$.

Теорема 2. *Пусть* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *– динамическая система на метрическом пространстве* X *и* $M \subset X$ *– компактное слабо притягивающее множество. Предположим, что* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *асимптотически компактна при* $t \to +\infty$ *и при* $t \to -\infty$ *в области слабого притяжения* $A^+{}_\omega(M)$. *Тогда псевдопролонгация* $\sigma^+(M)$ *является наименьшим компактным инвариантным асимптотически устойчивым множеством, содержащим* M, *причем*

$$A^+{}_\omega(M) = A^+\big(\sigma^+(M)\big).$$

Теорема 3. *Пусть* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *– динамическая система на локально компактном метрическом пространстве* X *и* $M \subset X$ *– компактное слабо притягивающее множество. Тогда имеют место равенства* $\sigma^+(M) = E_\omega(M) = D^+(M)$.

Литература

1. Ura T. *Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace a n dimentions* // Ecole Normale Sup. 1953. V. 70. P. 287–360.

2. Seibert P. *Prolongations and generalized Liapunov functions* // Tech. Rep. 61-7 RIAS, Baltimore. 1961. P. 454–462.

3. Auslander J. P., Seibert P. *Prolongations and stability in dynamical systems* // Grenoble. Ann. Inst. Fourier. 1964. V. 14(2). P. 237–267.

4. Ладис Н. Н. *Топологическая эквивалентность некоторых дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 1972. T. 8(7). C. 1116–1119.

5. Pelczar A. *Semi-stability of motions and regular dependence of limit sets on points in general semi-systems* // Annales Polon. Math. 1983. V. 42. P. 263–282.

6. Рейзинь Л. Э. *Функции Ляпунова и проблема различения.* Рига: Зинатне, 1986.

7. Pelczar A. *Prolongations and prolongational limit sets in generalized semi-systems on metric spaces* // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematia. 1994. V. 31. P. 203–240.

8. Hajek O. *Prolongation in topological dynamical* // Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems. II. Lectur Notes in Math. Berlin; Heidelberg; New-York: Springer, 1970. V. 144. P. 79–89.

9. Bhatia N. P., Szegö G. *Stability theory of Dynamical systems.* Berlin; New-York: Springer, 1970.

10. Калитин Б. С. *Качественная теория устойчивости движения динамических систем.* Минск: БГУ, 2002.

11. Калитин Б. С. *Устойчивость динамических систем (Качественная теория).* Саарбрюкен: LAP Lambert Academic Publishing, 2012.

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРОВ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

А.М. Камачкин, Д.К. Потапов, В.В. Евстафьева

Рассмотрим математические модели систем автоматического управления, которые описываются n-мерными системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma) + Kf(t) \tag{1}$$

(модель неавтономной системы) и

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma) \tag{2}$$

(модель автономной системы). Здесь X – вектор состояний системы, $X \in E^n$, E^n – n-мерное евклидово пространство, A – постоянная ненулевая матрица размерности $n \times n$ с вещественными элементами, B и K – постоянные ненулевые векторы из E^n с вещественными элементами, $F(\sigma)$ – функция, описывающая нелинейность типа неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями l_1, l_2 $(l_1 < l_2)$ и значениями выхода m_1, m_2 $(m_1 < m_2)$, $\sigma = (\Gamma, X)$ – скалярное произведение векторов Γ и X, где Γ – постоянный ненулевой вектор из E^n с вещественными элементами. Функция $F\big(\sigma(t)\big)$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geqslant 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задается в соответствии с [1] следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leqslant l_1$ следует равенство $F(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geqslant l_2$ следует равенство $F(\sigma) = m_2$, а из неравенств $l_1 < \sigma(t) < l_2$ $(t_1 < t \leqslant t_2)$ следует равенство $F\big(\sigma(t_1)\big) = F\big(\sigma(t_2)\big)$. Таким образом, $F\big(\sigma(t)\big)$ принимает постоянное значение на отрезке $[t_1, t_2]$, если либо $F\big(\sigma(t_1)\big) = m_1$ и $\sigma(t) < l_2$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $F\big(\sigma(t_1)\big) = m_2$ и $\sigma(t) > l_1$ при $t \in [t_1, t_2]$. В приложениях функцию

$F(\sigma)$ называют нелинейной характеристикой системы [2]. Петля гистерезиса, описываемая в координатах (σ, F) уравнениями $\sigma = \sigma(t)$, $F = F\big(\sigma(t)\big)$, обходится против хода часовой стрелки (см. рисунок, например, в [3]). Функцию $F(\sigma)$ рассматриваем в качестве управления. Функция $f(t)$ описывает внешнее воздействие на систему и может быть как периодической, так и непериодической, но в любом случае полагаем, что она непрерывная и ограниченная, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(t)| \leqslant M$ для любой вещественной переменной $t \geqslant 0$.

Из последних работ по исследованию нелинейных систем, замкнутых обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом, отметим [4–11].

Наряду с периодическими рассматриваем ограниченные решения изучаемых систем, т. е. решения, расположенные в некоторой ограниченной области фазового пространства. Имеют место нижеследующие теоремы (см. [11]).

Теорема 1. *Пусть, кроме предположений, сделанных выше относительно правой части системы (1), все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, и выполнены следующие условия:*

$$-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) < l_1, \quad -(\Gamma, A^{-1}Bm_1) > l_2.$$

Тогда все установившиеся движения системы (1) принадлежат некоторой ограниченной области фазового пространства или, иначе, изображающая точка любого решения системы (1) за конечное время попадет и останется в некоторой ограниченной области фазового пространства.

Теорема 2. *Пусть при некотором наборе параметров матрицы A, векторов B, K, Γ и функций $F(\sigma)$, $f(t)$ система (1) удовлетворяет условиям теоремы 1 и имеет хотя бы одно периодическое решение с $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) изолированными точками переключения $X^1, \ldots, X^{2n}$, расположенными на поверхностях переключения $(\Gamma, X) = l_1$ и $(\Gamma, X) = l_2$. Тогда точки переключения локально непрерывно зависят от этого набора параметров, если*

$$\begin{vmatrix} (\Gamma, (X^1)'_{t_1}) \ldots (\Gamma, (X^1)'_{t_{2n}}) \\ \ldots \\ (\Gamma, (X^{2n})'_{t_1}) \ldots (\Gamma, (X^{2n})'_{t_{2n}}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $t_1, \ldots, t_{2n}$ – моменты времени переключения, $(X^i)'_{t_j}$ – частная производная элементов вектора X^i по переменной t_j $(i, j = \overline{1, 2n})$.

Теорема 3. *Пусть система (2) удовлетворяет условиям теорем 1 и 2 относительно параметров матрицы A, векторов B, Γ, функции $F(\sigma)$ и, кроме того, $(\Gamma, B) \neq 0$. Тогда унимодальное* [12] *периодическое решение системы (2) локально непрерывно зависит от указанных параметров, если выполняется неравенство*

$$\begin{gathered}(\Gamma, \Theta_1(e^{AT}Bm_1 + e^{A\tau_1}B(m_2 - m_1) - Bm_2))(\Gamma, \Theta_2 e^{A\tau_2}B(m_1 - m_2)) + \\ +(\Gamma, \Theta_2 e^{A\tau_1}B(m_2 - m_1))(\Gamma, \Theta_1(e^{AT}Bm_2 + e^{A\tau_2}B(m_1 - m_2) - Bm_1)) + \\ +(\Gamma, \Theta_2(e^{AT}Bm_1 + e^{A\tau_1}B(m_2 - m_1)))(\Gamma, \Theta_2(e^{AT}Bm_2 + e^{A\tau_2}B(m_1 - m_2))) - \\ -(\Gamma, \Theta_2 e^{AT}Bm_1)(\Gamma, \Theta_2 e^{AT}Bm_2) \neq 0,\end{gathered}$$

где $\Theta_1 = (E - e^{AT})^{-2}e^{AT}$, $\Theta_2 = (E - e^{AT})^{-1}$, E – единичная матрица, $T = \tau_1 + \tau_2$, τ_1, τ_2 – времена переходов изображающей точки между поверхностями переключения.

Полученные результаты дают достаточное условие ограниченности решений существенно нелинейной неавтономной системы (теорема 1), а в случае наличия у такой системы периодических решений достаточные условия независимости конфигураций этих решений от достаточно малых изменений параметров системы (теоремы 2 и 3). Более того, выписаны условия, позволяющие исследователям ограничивать выбор параметров системы. Применение теоремы 3 иллюстрируется на примере системы (2) при $n = 2$.

Литература

1. Покровский А. В. *Существование и расчет устойчивых режимов в релейных системах* // Автомат. и телемех. 1986. № 4. С. 16–23.

2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний.* М.: Физматгиз, 1959.

3. Leonov G. A., Shumafov M. M., Teshev V. A., Aleksandrov K. D. *Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations* // Differ. Eq. 2017. V. 53. № 13. P. 1764–1816.

4. Евстафьева В. В. *Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа* // Укр. матем. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.

5. Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В. *Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. управ. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199.

6. Фурсов А. С., Тодоров Т. С., Крылов П. А., Митрев Р. П. *О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.

7. Евстафьева В. В. *О существовании двухточечно-колебательных решений возмущенной релейной системы с гистерезисом* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.

8. Евстафьева В. В. *Существование T/k -периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы* // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.

9. Євстаф'єва В. В. *Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці* // Укр. матем. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.

10. Фурсов А. С., Митрев Р. П., Крылов П. А., Тодоров Т. С. *О существовании периодического режима в одной нелинейной системе* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.

11. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. *Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system* // Appl. Math. 2022. V. 67. № 1. P. 65–80.

12. Varigonda S., Georgiou T. T. *Dynamics of relay relaxation oscillators* // IEEE Trans. Automat. Control. 2001. V. 46. № 1. P. 65–77.

РАВНОМЕРНАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ ДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Козлов, Т.А. Александрович

Рассмотрим линейную дискретную систему управления [1, с. 214]

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

в которой $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – ограниченные, ω-периодические последовательности соответственно $(n \times n)$- и $(n \times m)$- вещественных матриц $(\omega \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$; $x = x(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $u = u(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ – управляющее воздействие.

Напомним, что последовательность матриц $N(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, называется *ω-периодической*, если найдется число $\omega \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства $N(k+\omega) = N(k)$.

Полагаем также, что функция $A:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ является *вполне ограниченной* [2] на $\mathbb{Z}$. Последнее означает [2], что при каждом $k\in\mathbb{Z}$ матрица $A(k)$ обратима и найдется такое число $a\geqslant 1$, при котором имеет место соотношение

$$\sup\{\|A(k)+A^{-1}(k)\|,\ k\in\mathbb{Z}\}\leqslant a.$$

Управление u в системе (1) будем выбирать линейным по состоянию $u(k)=U(k)x(k)$, где $U(k)$, $k\in\mathbb{Z}$, – некоторая последовательность вещественных $(m\times n)$-матриц. В результате получим замкнутую линейную однородную систему с дискретным временем

$$x(k+1)=(A(k)+B(k)U(k))x(k),\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{2}$$

в которой функция $U:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^{m\times n}$ играет роль матричного управляющего воздействия.

Следуя работе [3], далее будем пользоваться нижеприведенным допущением.

Определение 1. [3] Матричное управление $U:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^{m\times n}$ будем называть *допустимым* для системы (2), если выполнены условия:

1) управление $U(\cdot)$ ограничено на $\mathbb{Z}$, т.е. справедливо неравенство

$$\sup\{\|U(k)\|, k\in\mathbb{Z}\}<\infty;$$

2) при каждом $k\in\mathbb{Z}$ матрица $A(k)+B(k)U(k)$ обратима, причем имеет место оценка

$$\sup\big\{\|\big(A(k)+B(k)U(k)\big)^{-1}\|, k\in\mathbb{Z}\big\}<\infty.$$

Определение 2. [1, с. 13 – 14] Напомним, что *матрица Коши* $X(k,s)\in\mathrm{M}_n$, $k,s\in\mathbb{Z}$, дискретной системы $x(k{+}1)=A(k)x(k)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{Z}$, определяется равенством

$$X(k,s)=\begin{cases} A(k-1)\cdot A(k-2)\cdot\ldots\cdot A(s) & \text{при } k>s,\\ E & \text{при } k=s,\\ X^{-1}(s,k) & \text{при } k<s.\end{cases}$$

Определение 3. Будем говорить, что линейная дискретная система (2) обладает свойством *равномерной глобальной достижимости*, если существует такое натуральное число $T>0$, что для любых $\alpha>0$ и $\beta>0$ найдется величина $d=d(\alpha,\beta)>0$, при которой для произвольной $(n\times n)$-матрицы Λ, удовлетворяющей неравенствам $|\det\Lambda|\geqslant\alpha$ и $\|\Lambda\|\leqslant\beta$, и всякого $k_0\in\mathbb{Z}$ существует допустимое управление $U\colon\{k_0,k_0{+}1,\ldots,k_0{+}T\}\to\mathbb{R}^{m\times n}$, удовлетворяющее при всех $k\in\{k_0,k_0{+}1,\ldots k_0{+}T\}$ оценке $\|U(k)\|\leqslant d(\alpha,\beta)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(\cdot,\cdot)$ системы (2) на указанном множестве равенство $X_U(k_0+T,k_0)=\Lambda$.

По-видимому, впервые термин «равномерная глобальная достижимость» был введен В. А. Зайцевым и Е. Л. Тонковым в статье [4] для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot x=A(t)x+B(t)u,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad u\in\mathbb{R}^m,\quad n,m\in\mathbb{N},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Свойство равномерной глобальной достижимости линейной системы (2) с дискретным временем (равно как и с непрерывным) дает возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном целочисленном временнóм отрезке фиксированной длины $T\in\mathbb{N}$, т. е. позволяет построить такое допустимое управление U, что множество $\{x_i(k)\}_{i=1}^n$, $k\in\mathbb{Z}$, линейно-независимых решений системы (2) с этим управлением и начальными условиями — соответствующими векторами e_i, $i = \overline{1,n}$, канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ — через время T будет совпадать с произвольным наперед заданным базисом этого пространства.

Замечание 2. Отметим, что существенное отличие свойства равномерной глобальной достижимости линейных дифференциальных систем от дискретных систем заключается в том, что для последних матрица Коши может иметь не только отделенный от нуля положительный, но и отрицательный определитель. Поэтому в определении 3, в отличие от определения равномерной глобальной достижимости линейных дифференциальных систем (см. напр., статью [4]), для квадратной $(n\times n)$-матрицы Λ выполняется неравенство $|\det\Lambda| \geqslant \alpha$.

В работе [5] был установлен критерий равномерной глобальной достижимости линейных систем с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами вида

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Теорема 1. [5] *Система (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда соответствующая замкнутая система (4) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Эта теорема устанавливает эквивалентность наличия свойства равномерной глобальной достижимости у системы (4) и свойства равномерной полной управляемости [6, 7] соответствуюшей линейной управляемой системы (4). Дискретным аналогом последнего свойства служит следующее

Определение 4. [3] Система (1) обладает *свойством равномерной полной управляемости*, если существуют такие числа $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что при любых числе $k_0 \in \mathbb{Z}$ и векторе $x_1 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u(k)$, $k = k_0, k_0+1, \ldots, k_0+K-1$, удовлетворяющее оценке $\|u(k)\| \leqslant \alpha\|x_1\|$, при котором для решения $x(k)$ системы (1) с этим управлением u и начальным условием $x(k_0) = 0$ обеспечивается равенство $x(k_0+K) = x_1$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Пусть матрица $A(\cdot)$ системы (1) вполне ограничена, а матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{Z}$. Тогда если дискретная система управления (1) с ω-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая замкнутая дискретная система (2) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

Литература

1. Гайшун И. В. *Системы с дискретным временем.* Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2001.

2. Демидович В. Б. *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.

3. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. *Pole placement theorem of discrete time-varying linear systems* // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017. V. 55. № 2. P. 671–692.

4. Зайцев В. А., Тонков Е. Л. *Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова* // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 45–56.

5. Козлов А. А. *Критерий равномерной глобальной достижимости периодических систем* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. № 2. С. 221–236.

6. Kalman R. E. *Contribution to the theory of optimal control* // Boletín de la Sociedad Matemátika Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.

7. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ АНСАМБЛЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ДЕСКРИПТОРНОГО РЕГУЛЯТОРА

В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович

Ансамбль линейных непрерывных систем – это совокупность систем, коэффициенты которых принадлежат некоторым заданным множествам [1].

Вопросы управляемости линейных систем динамическими регуляторами исследованы, например, в работе [2]. Однако на практике часто точные значения параметров и начальных состояний таких систем неизвестны. Заданы лишь множества, в которых эти параметры изменяются произвольным образом.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^r$; $A \in \mathbb{R}_{n,n}$, $B \in \mathbb{R}_{n,r}$ – некоторые матрицы.

Пусть $[A]$, $[B]$ – некоторые множества матриц соответственно размеров $n \times n$, $n \times r$ и $[x_0]$ – множество векторов, принадлежащих $\mathbb{R}^n$.

Будем теперь считать, что матрицы A и B и начальное состояние x_0 системы (1) принимают произвольные значения соответственно из множеств $[A]$, $[B]$, $[x_0]$.

Система (1) при указанных условиях – это ансамбль линейных управляемых систем (1).

В качестве управления $u(t)$ рассмотрим управление вида

$$u(t) = Cy(t), \tag{3}$$

где $C \in \mathbb{R}_{r,m}$, а $y(t)$ – выход линейной дескрипторной системы

$$D_0\dot{y}(t) = Dy(t), \quad y(0) = y_0. \tag{4}$$

Здесь $y, y_0 \in \mathbb{R}^m$; D_0, D – $(m \times m)$-постоянные матрицы, причём $\det D_0 = 0$ и пучок матриц $D_0 + \lambda D$ является регулярным.

Ясно, что при любых фиксированных матрицах $A \in [A]$, $B \in [B]$, и векторе $x_0 \in [x_0]$ и управлении (3) существует единственное решение системы (1)

$$\begin{gathered} x(t) = F(t,0)x_0 + \Big(\int\limits_0^t F(t,\tau)BCe^{D_0^d D\tau}d\tau\Big)y_0, \\ y_0 = D_0^d Dq, \end{gathered} \tag{5}$$

где $F(t,\tau)$ – фундаментальная матрица однородной задачи Коши для системы (1), D_0^d – обратная Дразина матрицы D_0 [3], а $q \in \mathbb{R}^m$.

Определение 1. Ансамбль систем (1) называется *управляемым дескрипторным регулятором* (4), если для любого $x_0 \in [x_0]$ найдутся момент времени $t_1 (t_1 < +\infty)$ и m-вектор q такие, что сечения $\{x(t_1)\}$ всех решений ансамбля обращаются в нуль.

Отметим, что в такой постановке задача управляемости ансамбля будет иметь решение лишь в исключительных случаях. Поэтому будем решать задачу построения такого управления (найти такое q), чтобы каждое решение $x(t)$ ансамбля удовлетворяло неравенству

$$|x(t_1)| \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

где $|x(t_1)|$ – вектор, составленный из модулей компонент вектора $x(t_1)$, а вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \geqslant 0$, здесь $\varepsilon_i \geqslant 0$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Ставится задача: найти вектор $\varepsilon \geqslant 0$ такой, что скалярное произведение

$$e'\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

было минимальным.

Таким образом, все траектории $x(t_1)$ в момент времени t_1 ансамбля обладают свойством, что попадают в "минимальную" окрестность нуля.

Учитывая (6), получим, что ансамбль управляем дескрипторным регулятором (4), когда при некотором $t_1\,(t_1 \in +\infty)$ для любого $x_0 \in [x_0]$ найдется такой m-вектор q (один и тот же для всех систем ансамбля), что выполняется неравенство

$$|x(t_1, q)| = |M(t_1)q - P| \leqslant \varepsilon.$$

Здесь $x(t_1, q) \equiv x(t_1)$, $M(t_1) = \int\limits_0^{t_1} F(t_1, \tau) B C e^{D_0^d D \tau} D_0^d D_0 d\tau$, $P = -F(t_1, 0)x_0$.

Тогда "минимальная" ε-окрестность нуля может быть найдена как решение задачи

$$\begin{aligned} & e'\varepsilon \to \min, \\ & -\varepsilon \leqslant Mq - P \leqslant \varepsilon, \\ & \varepsilon \geqslant 0,\, q \in Q,\, Q \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{7}$$

относительно переменных ε и q, Q – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^m$.

Следовательно, для управляемости ансамбля в смысле определения достаточно, чтобы задача (7) имела оптимальный план ε^0, q^0 с $\varepsilon^0 = 0$.

В частном случае, когда интервалы $[A], [B]$ вырождены, получаем известные результаты, установленные в работах [2, 4].

Литература

1. Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. *Управление ансамблем линейных дескрипторных двухпараметрических систем* // Весцi НАН РБ. 2018. № 1. С. 20–23.

2. Игнатенко В. В. *Управляемость динамических систем с помощью регулятора* // Вестник БГУ. сер.1. 1976. № 2. С. 56–58.

3. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose N. J. *Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular Coefficients* // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 31. № 3. P. 411–425.

4. Игнатенко В. В., Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *К управляемости линейных систем дескрипторными регуляторами* // Труды БГТУ. 2017. Сер. 3. № 1. С. 5–7.

О СРАВНЕНИИ ПРИЗНАКОВ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.В. Малыгина

Разностные уравнения с запаздыванием (Delay Difference Equations) в последние десятилетия активно используются для моделирования различных процессов в биологии, экологии, экономике. Интересно отметить, что эти уравнения все чаще обоснованно сопоставляются не с обыкновенными, а с функционально-дифференциальными уравнениями, к которым разностные уравнения с запаздыванием по своей природе оказались ближе. Эта аналогия явилась основой новых методов исследования разностных уравнений и дала возможность получить новые результаты. В этой связи интересно сравнение, например, эффективных признаков устойчивости, полученных для дифференциальных и разностных уравнений с запаздыванием.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с сосредоточенным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = -\sum_{k=1}^{K} a_k(t)x(t - h_k(t)), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

и разностное уравнение

$$x(n+1) - x(n) = -\sum_{k=1}^{K} a_k(n)x(n - h_k(n)), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2}$$

которое можно считать дискретным аналогом уравнения (1). Приведем два признака устойчивости для уравнений (1) и (2), которые можно рассматривать как обобщение «3/2-теоремы» А. Д. Мышкиса.

Обозначим $a(t) = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k(t)$, $h(t) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant K} h_k(t)$.

Теорема 1. [1] *Пусть* $a_k(t) \geqslant 0$, $h_k(t) \geqslant 0$ *при любом* $k = \overline{1, K}$. *Если*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \int\limits_{t-h(t)}^{t} a(s)\, ds < \frac{3}{2}, \tag{3}$$

то для функции Коши уравнения (1) при некоторых N, $\alpha > 0$ *справедлива оценка*

$$|C(t, s)| \leqslant N \exp\left\{ -\alpha \int\limits_{s}^{t} a(\tau)\, d\tau \right\}, \quad t \geqslant s \geqslant 0. \tag{4}$$

Теорема 2. [2] *Пусть* $a_k(n) \geqslant 0$, $h_k(n) \geqslant 0$ *при любом* $k = \overline{1, K}$. *Если*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \frac{3}{2}, \tag{5}$$

то для функции Коши уравнения (2) при некоторых N, $\alpha > 0$ *справедлива оценка*

$$|C(n, m)| \leqslant N \exp\left\{ -\alpha \sum_{i=m}^{n} a(i) \right\}, \quad n \geqslant m \geqslant 0. \tag{6}$$

Постоянная $3/2$ в неравенствах (3) и (5) является точной: ее нельзя уменьшить без нарушения оценок (4) и (6), что доказывается построением соответствующих примеров. Но в этих примерах есть существенное отличие. Для дифференциальных уравнений (1) точность постоянной $3/2$ сохраняется независимо от того, является величина $h(t)$ ограниченной или нет, а для разностных уравнений (2) точность постоянной $3/2$ удается доказать, только если $h(n)$ может принимать сколь угодно большие значения. Если же подчинить $h(n)$ условию ограниченности, то оценку (5) можно усилить.

Теорема 3. [3, 4] *Пусть* $a_k(n) \geqslant 0$, $h_k(n) \geqslant 0$ *при любом* $k = \overline{1, K}$, *а* $h(n) \leqslant H$. *Если*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \frac{3}{2} + \frac{1}{2(H+1)}, \tag{7}$$

то для функции Коши уравнения (2) при некоторых N, $\alpha > 0$ *справедлива оценка (6).*

Дальнейшее усиление оценки (7) возможно, если рассматривать «полуавтономные» уравнения вида (2), т. е. такие, в которых $a_k(n) \equiv a_k \geqslant 0$. Обозначим $a = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k$,

$$\omega(H) = \begin{cases} \dfrac{12(H+1)}{5H+3+\sqrt{9H^2+6H+9}}, & H \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3), \\ \dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2H+1}\right), & H \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3), \\ \dfrac{12(H+1)}{5H+2+\sqrt{9H^2+12H+12}}, & H \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3). \end{cases}$$

Все три ветви функции ω асимптотически эквивалентны функции $\dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2H+1}\right)$.

Теорема 4. [5] *Если* $0 < (H+1)a < \omega(H)$, *то уравнение (2) экспоненциально устойчиво.*

Постоянные, определяющие области устойчивости в теоремах 3 и 4, также являются точными. Заметим, что для уравнения (1) сужение класса уравнений до полуавтономных сохраняет постоянную $3/2$ и ее неулучшаемость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание FSNM-2020-0028.

Литература

1. Малыгина В. В. *Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом* // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 10. С. 1716–1723.

2. Куликов А. Ю., Малыгина В. В. *Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями* // Известия вузов. Математика. 2008. № 3. С. 18–26.

3. Yu J. S. *Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay* // Comp. Math. Appl. 1998. V. 36. № 10–12. P. 203–210.

4. Куликов А. Ю. *Устойчивость линейного неавтономного разностного уравнения с ограниченными запаздываниями* // Известия вузов. Математика. 2010. № 11. С. 22–30.

5. Куликов А. Ю., Малыгина В. В. *Об устойчивости полуавтономных разностных уравнений* // Известия вузов. Математика. 2011. № 5. С. 25–34.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И.И. Матвеева

Рассматриваются некоторые классы систем неавтономных уравнений с запаздыванием, при этом запаздывание может быть неограниченным. Используя функционалы Ляпунова–Красовского специального вида, установлены оценки решений этих систем на правой полуоси. Полученные оценки позволяют сделать вывод об устойчивости решений. В случае асимптотической устойчивости указаны оценки на области притяжения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. Работа продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–9]).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах* // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48. № 5. С. 1025–1040.

2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами* // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 5. С. 1059–1077.

3. Матвеева И. И. *Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа* // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 2. С. 344–352.

4. Матвеева И. И. *Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 6. С. 730–740.

5. Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А. *Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах* // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60. № 5. С. 1063–1079.

6. Матвеева И. И. *Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. № 3. С. 96–103.

7. Matveeva I. I. *Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients* // Electronic Journal of Differential Equations. 2020. V. 2020. № 20. P. 1–12.

8. Матвеева И. И. *Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 4. С. 612–620.

9. Матвеева И. И. *Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием* // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 3. С. 583–598.

О НАБЛЮДАТЕЛЯХ С ФИНИТНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.В. Метельский, В.Е. Хартовский

Пусть задана линейная автономная дифференциально-разностная система нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t-ih), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$, x – вектор решения, y – вектор выходных величин, доступных наблюдению (выход), $h = \mathrm{const} > 0$. Решение уравнения (1) однозначно задается начальной функцией $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-mh, 0]$, взятой из класса непрерывных на отрезке $[-mh, 0]$ функций, имеющих на этом отрезке кусочно-непрерывную производную. Считаем, что функция φ является неизвестной.

Задача 1. Требуется построить линейную автономную дифференциальную систему запаздывающего типа с выходом $\bar{x}$ такую, что при входном сигнале y, определяемом формулой (2), выход $\bar{x}$, начиная с некоторого момента времени $t_1 > 0$, есть точная оценка неизвестного решения x уравнения (1): $\bar{x}(t) - x(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$. Дифференциальную систему с выходом $\bar{x}$, реализующую оценку x уравнения (1), назовем *финитным наблюдателем* для системы (1), (2).

Термин «наблюдатель» в теории линейных систем был впервые введен в 1963 г. Луенбергером [1]. Этим термином обозначалась динамическая система, переменные выхода которой представляют собой оценки переменных состояния другой системы. Известно, что для каждой наблюдаемой линейной системы может быть спроектирован асимптотический наблюдатель с ошибкой оценки, стремящейся к нулю с заданной скоростью.

В дальнейшем теория проектирования асимптотических наблюдателей получила широкое развитие и на сегодняшний день располагает обширной библиографией.

Финитные наблюдатели, т.е. наблюдатели, погрешность оценки которых есть финитная функция, встречаются в литературе гораздо реже и, как правило, строятся для объектов, которые удовлетворяют не только условиям полной наблюдаемости, но и некоторым дополнительным ограничениям [3].

В настоящем докладе для линейных автономных дифференциальных систем нейтрального типа дается решение задачи проектирования финитного наблюдателя. В основе идеи лежит выбор параметров финитного наблюдателя таким образом, чтобы его ошибка удовлетворяла точечно вырожденной системе (система называется точечно вырожденной в направлении вектора g, если найдется момент времени $t_1 > 0$ такой, что $g^T x(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, для всех начальных состояний этой системы).

Обозначим:

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i,$$

$I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ – единичная матрица, $W(p, \lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$ – характеристическая матрица системы (1) (при $\lambda = e^{-ph}$), $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Теорема. *Для того, чтобы задача 1 была разрешима необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

$$1)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что теорема определяет критерий полной наблюдаемости системы (1) по прошлому выходу. Другими словами, условия теоремы являются необходимыми и достаточными для существования непрерывного оператора восстановления текущего состояния.

Далее в докладе дается описание разработанных в [2, 3] методов синтеза регуляторов, обеспечивающих решение задачи 1. Обсуждается два вида финитных наблюдателей (и их модификации). Первый вид описывается системой запаздывающего типа с конечным спектром и с сосредоточенными и распределенными запаздываниями. При этом спектр такой системы можно выбрать заранее. Другой вид наблюдателя также описывается системой запаздывающего типа с конечным спектром, но без распределенных запаздываний. Однако спектр этой системы выбрать заранее невозможно.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция–2025».

Литература

1. Luenberger D. G. *An Introduction to Observers* // IEEE Trans. Automat. Contr. 1971. V. AC-16. № 6. P. 596–602.

2. Pourboghrat F. *Exact state-variable reconstruction of delay systems* // Internat. J. Control. 1986. V. 44. № 3. P. 867–877.

3. Метельский А. В., Хартовский В. Е. *Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа* // Автоматика и телемех. 2019. № 12. С. 80–102.

4. Метельский А. В., Хартовский В. Е. *О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285.

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧАХ С НЕФИКСИРОВАННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРОЦЕССА

Д.Ю. Прудникова

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t),\ t \in T = [t_0, t_1]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$x(t_1) = x_1, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} (1 + x^T Q(t)x + u^T P(t)u)\, dt \to \min, \tag{2}$$

где μ – малый (по модулю) параметр, t_0 – заданный начальный момент времени, t_1 – нефиксированный конечный момент времени, x – n-вектор, $f(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant t_0$, – нелинейная вектор-функция, $Q(t)$ – неотрицательно-определенная симметрическая матрица, $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \geqslant t_0$.

Предположение 1. *Элементы матриц* $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant t_0$, *принадлежат классу* $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in \left[t_0, t_1^{(N)}(\mu)\right]$, назовем *асимптотически субоптимальным управлением* N*-го порядка* $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ *в задаче* (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества $J(u)$ от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор–функцию $u^{(N)}(x,t,\mu)$ назовем *асимптотически субоптимальной обратной связью* N*-го порядка*, если для любого начального состояния (x_0, t_0), $t_0 < t_1$, имеет место $u^{(N)}(x_0, t_0, \mu) = u^{(N)}(t_0, \mu)$, где $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1), (2).

В [1] предложен алгоритм построения асимптотических приближений произвольного порядка к программному оптимальному управлению и оптимальной обратной связи в решении рассмотренной задачи (1), (2). Методика состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных, которые в силу принципа максимума соответствуют оптимальному управлению.

Целью работы является исследование поведения асимптотически субоптимальной обратной связи для данной задачи.

Следуя алгоритму, изложенному в [2], вычисления при построении асимптотических приближений начинаются с решения базовой задачи, которая получается из исходной при $\mu = 0$:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

$$x(t_1) = x_1, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} (1 + x^T Q(t)x + u^T P(t)u)\,dt \to \min. \tag{4}$$

Предположение 2. *Динамическая система в рассмотренной базовой задаче является вполне управляемой* [3].

После решения базовой задачи формируется матрица

$$I_0 = \begin{pmatrix} F_{12}(t_1^0, t_0) & \dot{x}^0(t_1^0) \\ 2\big(F_{22}(t_1^0, t_0)B(t_1^0)u^0(t_1^0)\big)^T & \dfrac{d}{dt_1}\big(u^{0T}(t_1^0)P(t_1^0)u^0(t_1^0)\big) \end{pmatrix},$$

где $F_{12}(t_1^0, t_0)$, $F_{22}(t_1^0, t_0)$ – блоки матрицы $F(t)$, $t \in T^0$, которая является решением начальной задачи

$$\dot{F} = \overline{A}(t)F, \quad F(t_0) = E_{2n},$$

в которой

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)P^{-1}(t)B^T(t) \\ Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix}.$$

Предположение 3. *Выполнено условие* $\det I_0 \neq 0$.

Построить асимптотически субоптимальные управления типа обратной связи в явном виде не удаётся из-за нелинейности полученных систем, однако для конкретных задач иногда это сделать возможно. Как известно, классическая обратная связь при отсутствии возмущений полностью совпадает с программным управлением. При применении метода малого параметра строятся асимптотические приближения к программному оптимальному управлению и оптимальной обратной связи.

Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x_1} = \mu x_2 x_3 + u_1, \quad \dot{x_2} = \mu x_1 x_3 + u_2, \quad \dot{x_3} = -2\mu x_1 x_2 + u_3,$$

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 3, \quad x_3(0) = 1,$$

$$x_1(t_1) = 0, \quad x_2(t_1) = 0, \quad x_3(t_1) = 0,$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_1} (1 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 4{u_1}^2 + 4{u_2}^2 + 4{u_3}^2)\,dt \to \min.$$

Найдем асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка, которая принимает следующий вид

$$\overline{u}^{(0)}(x,t) = -\frac{\exp\big(t_1^0(x,t)\big) + \exp(t)}{2(\exp\big(t_1^0(x,t)\big) - \exp(t))}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad t \in \big[t_0, t_1^0(x,t)\big],$$

где $t_1^0(x,t) = t - 2\ln\Bigg(\Big(2x_1^2 - 2\big((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)\big)^{1/2} + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 1\Big)^{1/2}\Bigg)$.

Во всех примерах, где удалось построить асимптотически субоптимальную обратную связь оказалось, что даже применение асимптотически субоптимальных обратных связей нулевого порядка приводит к тому, что невязки в системе становятся равны нулю. Поэтому зачастую нет необходимости использовать асимптотические приближения первого порядка к оптимальной обратной связи.

Литература

1. Калинин А. И. *Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем.* Минск: Экоперспектива, 2000.

2. Калинин А. И., Лавринович Л. И. *Применение метода возмущений к задаче оптимизации переходного процесса в квазилинейной динамической системе* // Доклады НАН Беларуси. 2022. Т. 66. № 1. С. 21–25.

3. Красовский Н. Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

О РАСПОЛОЖЕНИИ НУЛЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т.Л. Сабатулина

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием

$$\dot{x}(t) + ax(t) + k\int\limits_{t-h}^{t} x(s)\,ds = f(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}_+$, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ локально суммируема.

Следуя [1, с. 9-10], назовём *решением* уравнения (1) локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду. При отрицательных значениях аргумента полагаем, что функция x доопределена суммируемой начальной функцией.

Характеристическая функция уравнения (1) имеет вид

$$g(p) = p + a + k\frac{1 - e^{-ph}}{p}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

В силу [2], расположение нулей функции g на комплексной плоскости напрямую влияет на асимптотические свойства решений уравнения (1). В частности (см. [3, с. 102]), для того чтобы уравнение (1) было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все нули его характеристической функции лежали слева от мнимой оси.

Одним из наиболее эффективных методов исследования асимптотических свойств решений автономных уравнений является метод D-разбиений [4]. Поверхность D-разбиения определяется следующим образом:

$$\operatorname{Re} kh^2 = \frac{y}{2}\left(y - ah\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\right), \quad \operatorname{Im} kh^2 = -\frac{y}{2}\left(y\operatorname{ctg}\frac{y}{2} + ah\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Она содержит три независимых параметра и имеет довольно сложную структуру.

В случаях $a = 0$, $k \in \mathbb{C}$ и $a, k \in \mathbb{R}$ найдены не только области экспоненциальной устойчивости, но и во всех множествах D-разбиения определено число нулей функции g, лежащих справа от мнимой оси (см. рис. 1).

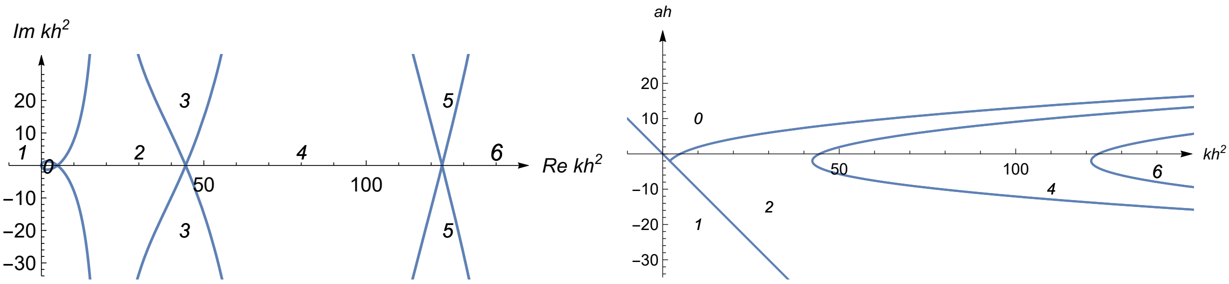


Рис. 1. Множества D-разбиения.

Если в поверхности D-разбиения $y \in (y_0, y_0)$, где y_0 – наименьший положительный корень уравнения $-y \operatorname{ctg} \frac{y}{2} = ah$, то получаем поверхность, которая ограничивает область D (см. рис. 2). Удалось установить, что уравнение (1) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда точка $(\operatorname{Re} kh^2, \operatorname{Im} kh^2, ah)$ принадлежит области D.

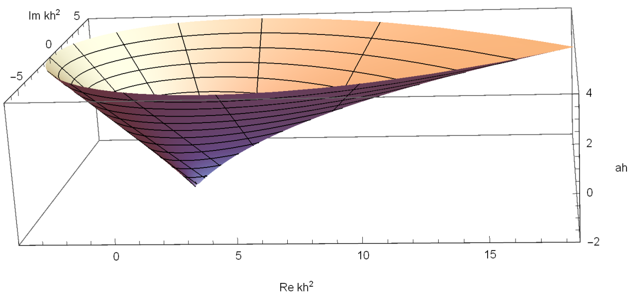


Рис. 2. Область D.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028).

Литература

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1991.

2. Зубов В. И. *К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом* // Изв. вузов. Матем. 1958. № 6. С. 86–95.

3. Мышкис А. Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* М.: Наука, 1972.

4. Неймарк Ю. И. *Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределённых).* Л.: ЛКВВИА, 1949.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ В ОДНОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

М.А. Скворцова

В работе рассматривается модель иммунной реакции растений, описываемая системой дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P(t) = k\Big(S(t)+W(t)\Big) - ke^{-\varepsilon\tau_1}\Big(S(t-\tau_1)+W(t-\tau_1)\Big) - \varepsilon P(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}S(t) = ke^{-\varepsilon\tau_1}\Big(S(t-\tau_1)+W(t-\tau_1)\Big) - S(t)\Big(\lambda I(t) + \delta I(t-\tau_2) + \varepsilon S(t)\Big), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}I(t) = I(t)\Big(\lambda S(t) - (z+\sigma) - \delta\phi I(t-\tau_2)\Big), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}R(t) = \sigma I(t) + \delta\phi I(t)I(t-\tau_2) - \varepsilon R(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}W(t) = \delta S(t)I(t-\tau_2) - \varepsilon W(t). \end{cases}$$

Здесь $P(t)$ – численность незрелых клеток, $S(t)$ – численность восприимчивых клеток, $I(t)$ – численность инфицированных клеток, $R(t)$ – численность восстановленных клеток, $W(t)$ – численность невосприимчивых клеток. Параметр запаздывания $\tau_1 \geqslant 0$ отвечает за время созревания клетки, параметр запаздывания $\tau_2 \geqslant 0$ – за время задержки реакции иммунной системы на заражение вирусами.

В работе изучается асимптотическая устойчивость двух положений равновесия, соответствующих состоянию системы в случае заражения и состоянию системы в случае выздоровления. Установлены оценки, характеризующие скорости стабилизации решений к положениям равновесия на бесконечности. Получены оценки для множеств притяжения данных положений равновесия. Все величины, присутствующие в оценках, выражены в явном виде через коэффициенты системы. При получении результатов использовались различные функционалы Ляпунова–Красовского [2].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Neofytou G., Kyrychko Y. N., Blyuss K. B. *Time-delayed model of immune response in plants* // Journal of Theoretical Biology. 2016. V. 389. P. 28–39.

2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Е. Хартовский

Объект исследования – линейная автономная вполне регулярная дифференциально-алгебраическая система с последействием Σ:

$$\frac{d}{dt}\left(Dx(t)\right) = \sum_{i=0}^{m}\left(A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih)\right), \quad t>0, \tag{1}$$

$$x(t) = \eta(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0], \tag{2}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t - ih), \quad t > 0, \tag{3}$$

где $x(t)$ – решение уравнения (1), $u(t)$ – кусочно-непрерывное управление, y – наблюдаемый выход; $h = \mathrm{const} > 0$, $D, A_i, \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$. Считаем, что начальная функция $\eta \in \mathbf{PC}_D$. Здесь для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ запись $\mathbf{PC}_A$ обозначает множество кусочно-непрерывных функций $\eta : [-mh, 0] \to \mathbb{R}^n$ таких, что функция $A\eta$ непрерывна.

Обозначим $\operatorname{rank} D = n_1$, $n_2 = n - n_1$. Систему Σ назовем *вполне регулярной*, если $\deg |pD - A_0| = n_1$.

Определение 1. Начальную функцию $\eta \in \mathbf{PC}_D$ в формулах (2) назовем *полностью* 0*-управляемой*, если существуют момент времени $t_1 > mh$ и кусочно-непрерывное управление $u(t), t > 0$, такие, что

$$x(t) \equiv 0, \quad t > t_1, \tag{4}$$

и $u(t) \equiv 0$ при $t > t_1 - mh$.

Если полностью 0-управляемы все начальные функции $\eta \in \mathbf{PC}_D$, то систему (1) назовем *полностью* 0*-управляемой.*

Определение 2. Начальную функцию $\eta \in \mathbf{PC}_D$ в формулах (2) будем называть 0*-управляемой*, если существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t), t > 0$, такие, что имеет место тождество (4). Если 0-управляемы все функции $\eta \in \mathbf{PC}_D$, то систему Σ назовем 0-управляемой.

Определение 3. Систему (1) ($u = 0$) назовем *финально наблюдаемой в направлении* $\rho \in \mathbf{PC}_D$, если найдутся такие момент времени $t_0 > mh$ и кусочно-непрерывная функция $v(t), t \in [mh, t_0)$, что для любого решения уравнения (1) выполняется соотношение

$$\int_{mh}^{t_0} v'(t) y^1(t)\, dt = \rho'(0) Q x(t_0) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0 - ih}^{t_0} \rho'(t_0 - ih - t) L_i x(t)\, dt.$$

Если система (1) финально наблюдаема в любом направлении $\rho \in \mathbf{PC}_D$, то систему (1) назовем *полностью финально наблюдаемой.*

Обозначим: $W(p, \lambda) = pD - \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i$, $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i$, $C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i$.

Пусть $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_2\times n}$, $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n\times n_2}$ – матрицы фундаментальных систем решений алгебраических систем $\gamma_1 D = 0$ и $D\gamma_2 = 0$ соответственно (относительно неизвестных γ_i, $i = 1, 2$).

Теорема 1. *Для того чтобы система (1) была полностью* 0*-управляема необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:*

$$1) \operatorname{rank}\big[W(p, e^{-ph}),\, B(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2) \operatorname{rank}\big[\Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2,\, \Gamma_1 B(\lambda)\big] = n_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2. *Для того чтобы система (1) была полностью* 0*-управляема необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:*

$$1) \operatorname{rank}\big[W(p, e^{-ph}),\, B(e^{-ph}), G(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2) \operatorname{rank}\big[\Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2,\, \Gamma_1 B(\lambda), G(\lambda)\big] = n_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

где $G(\lambda)$ *– некоторая полиномиальная матрица.*

Теорема 3. *Для того чтобы система (1) была полностью финально наблюдаемой необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:*

$$1)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2, \\ C(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Следствие 1. *Для того чтобы существовали момент времени* t_0, *матричная функция* $V(t,\tau)$ *и полиномиальная матрица* $P(\lambda)$ *такие, что решение системы (1) представимо в виде*

$$x(t) = \int\limits_{mh}^{t_0} V(t,\tau)y(\tau)\,d\tau + P(\lambda_h)y(t), \quad t \in (t_0 - mh, t_0],$$

$$Dx(t_0 - mh) = D\int\limits_{mh}^{t_0} V(t_0 - mh,\tau)y^1(\tau)\,d\tau + QP(\lambda_h)y^1(t_0 - mh),$$

необходимо и достаточно выполнения условий теоремы 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция–2025».

О РАВНОМЕРНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

О.Б. Цехан

Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1]$ линейную нестационарную систему наблюдения

$$\Sigma_{A,c}: \quad \begin{array}{lll} \dot{x}(t) = A\,(t)\,x(t), & x \in \mathbb{R}^n, & t \in T, \\ y(t) = c\,(t)\,x(t), & v \in \mathbb{R}, & t \in T, \\ x(t_0) = x_0, & & \end{array} \tag{1}$$

где $(n \times n)$-матрица $A(t)$ и n-вектор-строка $c(t)$ непрерывны на T.

Для системы (1) класса $n-1$ [1] определим n-вектор-строки $s_{(A,c),j}(t)$, $j = \overline{1, n-1}$:

$$s_{(A,c),j}(t) = s_{(A,c),j-1}(t)A(t) + \dot{s}_{(A,c),j-1}(t), \quad s_{(A,c),0}(t) = c(t)$$

и составим из них $(n \times n)$-матрицу наблюдаемости [1]

$$S_{A,c}(t) = \begin{pmatrix} s_{(A,c),0}(t) \\ s_{(A,c),1}(t) \\ \cdots\cdots \\ s_{(A,c),n-1}(t) \end{pmatrix} \quad (t \in T). \tag{2}$$

Для выходной функции $y(t)$ системы (1) класса $n-1$ верны равенства

$$y^{(j)}(t) = s_{(A,c),j}(t)x(t) \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Определим n-вектор-столбец $Y(t) = \big(y(t),\ y^{(1)}(t),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t)\big)'$, где $'$ – символ транспонирования. Тогда равенства (3) с учетом (2) можно представить в виде

$$Y(t) = S_{A,c}(t)x(t). \tag{4}$$

Пусть $k \leqslant n,\ G \in \mathbb{R}^{k\times n},\ G \neq 0$. Следуя [1,2], введем

Определение. Систему (1) класса $n-1$ назовем *равномерно относительно G-наблюдаемой на отрезке T*, если при любом $x_0 \in \mathbb{R}^n$ отображение $Gx(t) \to y(t)$ инъективно для каждого $t \in T$.

Свойство равномерной относительной G-наблюдаемости равносильно тому, что по известным $A(t),\ c(t)\ (t \in T),\ G$ при каждом $t \in T$ значения k линейных комбинаций $Gx(t)$ координат состояния $x(t)$ системы (1) восстанавливаются однозначно по известному $Y(t)$.

Лемма. *Пусть даны $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. При любом заданном $Y, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, проекция Gx любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего матричному уравнению $Y = Sx$, на k направлений, заданных вектор-строками матрицы G, определяется однозначно по известному Y.

2. $Sg \not\equiv 0, \forall g \in \mathbb{R}^n : ||Gg|| \neq 0$.

3. Справедливо равенство

$$\operatorname{rank} S = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} G \\ S \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем импликацию $1 \Rightarrow 2$. Пусть существует линейный оператор $Z \in \mathbb{R}^{k\times n}$ такой, что

$$ZY = Gx, \forall x \in \mathbb{R}^n\colon\ Y = Sx, \tag{6}$$

но тем не менее для некоторого $g \in \mathbb{R}^n$ такого что $||Gg|| \neq 0$, верно $Sg = 0$. Тогда $ZSg = 0$, откуда с учетом (6) следует $||Gg|| = 0$. Полученное противоречие доказывает $1 \Rightarrow 2$.

Докажем $2 \Rightarrow 1$. Пусть верно 2. Если $Sg = 0$ возможно только для $g = 0$, то $\det S \neq 0$ и уравнение $Y = Sx$ однозначно разрешимо: $x = S^{-1}Y$. В противном случае существует $g \in \mathbb{R}^n$, $g \neq 0$, такой, что $Sg = 0$, и для любого такого g согласно утверждению 2 верно $Gg = 0$, а значит, любой правый делитель нуля (в том числе, максимального ранга) [3] матрицы S является правым делителем нуля и для матрицы G. Значит [4], матричное уравнение $ZS = G$ разрешимо относительно $Z \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Тогда проекция Gx определяется из $Y = Sx$ с помощью действия оператора $Z\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{k\times n}$ по правилу $Gx = ZY$. При этом восстановление однозначно, так как если $ZY^1 = ZY^2$, то $ZSx^1 = ZSx^2$, и значит, $Gx^1 = Gx^2$.

Докажем эквивалентность $2 \Leftrightarrow 3$. Пусть $Sg \not\equiv 0, \forall ||Gg|| \neq 0$, но не выполнено (5). Тогда существует $g_0 \neq 0$ такой, что $||Gg_0|| \neq 0$ и $Sg_0 = 0$, что противоречит 2. Обратно, из (5) вытекает, что существует ненулевая $n \times n$ матрица Z такая, что $G = ZS$. Поэтому $\forall g \in \mathbb{R}^n$, $||Gg|| \neq 0$, верно $||ZSg|| \neq 0$, а значит, $Sg \not\equiv 0$, что и завершает доказательство леммы.

Теорема. *Система (1) класса $n-1$ равномерно относительно G-наблюдаема на T тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} S\,(t) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} G \\ S\,(t) \end{bmatrix}$ для любого $t \in T$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что из определения равномерной относительной G-наблюдаемости системы (1) и представления (4) вытекает, что система (1) равномерно относительно G-наблюдаема на отрезке T тогда и только тогда, когда для любого $t \in T$ однозначно определяется проекция $Gx(t)$ вектора $x(t)$, удовлетворяющего матричному уравнению (4), на k направлений, заданных вектор-строками матрицы G. Далее справедливость утверждения следует из эквивалентности положений 1 и 3 Леммы.

Замечание 1. Для стационарных систем при $k = n$ определение равномерной относительной G-наблюдаемости совпадает с определением относительной наблюдаемости из [2], а критерий из теоремы – с критерием (1.3) из [2].

Замечание 2. Из равномерной наблюдаемости следует равномерно относительная G-наблюдаемость при любой матрице G подходящей размерности. Обратное в общем случае не верно (см. пример).

Замечание 3. Из доказательства теоремы следует способ определения проекции $Gx(t)$ по известному $Y(t)$ для системы класса $n-1$:
1) по заданным $A(t)$, $c(t)$, $t \in T$, формируем матрицу наблюдаемости (2);
2) решаем уравнение $Z(t)S(t) = G$ относительно $Z(t)$;
3) по известному $Y(t)$ вычисляем проекцию $Gx(t)$ по формуле $Gx(t) = Z(t)Y(t)$.

Пример. Для системы (1) с параметрами

$$n = 3, \quad m = 1, \quad C(t) = (t \;\; t \;\; 0)\,, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -t \\ 1 & 0 & t \\ |t| & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица наблюдаемости (2) имеет вид

$$S(t) = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 1+t & 1+t & 0 \\ 2+t & 2+t & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank} S(t) = 1 \; \forall t \in \mathbb{R}$, то система (1) не является равномерно наблюдаемой [1] ни на каком интервале из $\mathbb{R}$. При $k = 1$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ она равномерно относительно G-наблюдаема на любом интервале $T \subset \mathbb{R}$, при этом оператор $Z(t)$ может быть выбран в виде $Z(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{1+t} & 0 \end{pmatrix}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ "Конвергенция-2025", задание 1.2.04).

Литература

1. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем* // Автоматика и телемеханика. 1998. № 7. С. 3–13.

2. Габасов Р., Жевняк Р. М., Кириллова Ф. М., Копейкина Т. Б. *Относительная наблюдаемость линейных систем. I. Обыкновенные системы* // Автоматика и телемеханика. 1972. Вып. 8. С. 5–15.

3. Буков В. Н., Рябченко В. Н., Косьянчук В. В., Зыбин Е. Ю. *Решение линейных матричных уравнений методом канонизации* // Вестник Киевского университета. Сер. Физико-математические науки. Вып. 1. 2002. С. 19–28.

4. Буков В. Н. *Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем.* Калуга: Изд-во научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006.

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

К.М. Чудинов

Определение 1. Будем говорить, что непрерывная функция, заданная на полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty)$, *осциллирует*, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Определение 2. Будем называть дифференциальное уравнение *осциллирующим*, если все его решения осциллируют.

Как известно [1], автономное линейное дифференциальное уравнение с запаздыванием $\dot{x}(t) + ax(t-r) = 0$ является осциллирующим, если и только если $ar > 1/e$. Первые достаточные условия осциллируемости неавтономного уравнения были получены А. Д. Мышкисом в середине XX в. Спустя 30 лет этот результат был усилен Р. Г. Коплатадзе и Т. А. Чантурия.

Пусть непрерывные функции a и h заданы на полуоси $\mathbb{R}_+$, при этом $h(t) \leqslant t$. Рассмотрим линейное неавтономное уравнение с одним запаздыванием

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Теорема 1. [2] *Если* $a(t) \geqslant 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = +\infty$ *и*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e, \tag{2}$$

то уравнение (1) является осциллирующим.

Случай автономного уравнения показывает, что константа $1/e$ в неравенстве (2) не может быть уменьшена. Более того, строгое неравенство не может быть заменено нестрогим.

Для автономного уравнения с несколькими запаздываниями справедлива

Теорема 2. [3] *Чтобы уравнение* $\dot{x}(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x(t-r_k) = 0$ *было осциллирующим, достаточно, чтобы* $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k r_k > 1/e$.

Рассмотрим неавтономное уравнение с несколькими запаздываниями

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t)x(h_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

где функции a_k и h_k кусочно-непрерывны и $h_k(t) \leqslant t$, $k = \overline{1,m}$.

Пусть $a_k(t) \geqslant 0$ и выполнено условие $\lim\limits_{t\to\infty} h_k(t) = +\infty$, $k = \overline{1,m}$. Тогда в силу теорем 1 и 2 естественно предположить, что осциллируемость уравнения (3) обеспечивается неравенством

$$\varliminf_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{h_k(t)}^{t} a_k(s)\,ds > 1/e. \tag{4}$$

Удивительно, но несмотря на то, что после 1982 г. в литературе было сделано много попыток приблизить достаточные условия осциллируемости уравнения (3) к неравенству (4), вопрос о том, верно ли высказанное выше предположение, в явном виде поставлен не был.

Выделим следующий результат.

Теорема 3. [4] *Если* $h_k(t) = t - r_k$, *где* $r_k = \text{const} > 0$, $k = \overline{1,m}$, *и*

$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t}^{t+r_k} a_k(s)\,ds > 1/e, \tag{5}$$

то уравнение (3) является осциллирующим.

В работе [5] показано, что если промежутки интегрирования $[t, t+r_k]$ в условии (5) заменить промежутками $[t - r_k, t]$, то в случае $m > 1$ теорема 3 обратится в неверное утверждение. Следствием этого является опровержение сформулированного выше предположения.

Обобщить теорему 1 на случай уравнения (3) удалось следующим образом.

Для $k = \overline{1,m}$ определим семейство множеств $E_k(t) = \{s \geqslant t : h_k(s) < t\}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Расширим класс уравнений (3). Пусть функции a_k локально суммируемы, функции h_k измеримы и $h_k(t) \leqslant t$ для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$, $k = \overline{1,m}$, а решение уравнения (3) определим в классе локально абсолютно непрерывных функций.

Пусть $a_k(t) \geqslant 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $h_k(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, $k = \overline{1,m}$.

Теорема 4. [6] *Если*

$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k(t)} a_k(s)\,ds > 1/e,$$

то уравнение (3) является осциллирующим.

Теорема 4 существенно усиливает теорему 1 даже в случае $m = 1$.

Следствие. *Если функции* h_k, $k = \overline{1,m}$, *непрерывны и строго возрастают к бесконечности на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *и при этом*

$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t}^{h_k^{-1}(t)} a_k(s)\,ds > 1/e,$$

то уравнение (3) является осциллирующим.

Заметим, что изложенный подход к обобщению теоремы Коплатадзе–Чантурия на случай уравнения (3) не единственный. Существует идейно идущий от работы [7] итерационный метод, состоящий в уточнении левой части неравенства. Упомянем также теорему Ханта–Йорка [8], предлагающую не интегральное, а «точечное» неравенство.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание FSNM-2020-0028.

Литература

1. Мышкис А. Д. *О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом* // Матем. сб. 1951. Т. 28(70). № 3. С. 641–658.

2. Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А. *О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом* // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1463–1465.

3. Ladas G., Stavroulakis I. P. *Oscillations caused by several retarded and advanced arguments* // J. Differential Equations. 1982. V. 44. P. 134–152.

4. Li B. *Oscillation of first order delay differential equations* // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. № 12. P. 3729–3737.

5. Чудинов К. М. *О точных достаточных условиях осцилляции решений линейных дифференциальных и разностных уравнений первого порядка с последействием* // Изв. вузов. Матем. 2018. № 5. С. 93–98.

6. Чудинов К. М. *Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и обобщении теоремы Коплатадзе–Чантурия* // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61. № 1. С. 224–233.

7. Koplatadze R., Kvinikadze G. *On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations* // Georgian Math. J. 1994. V. 1. № 6. P. 675–685.

8. Hunt B. R., Yorke J. A. *When all solutions of* $x' = -\sum q_i(t)x(t-T_i(t))$ *oscillate* // J. Differential Equations. 1984. V. 53. № 2. P. 139–145.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. Ыскак

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида

$$\frac{d}{dt}(y(t)+D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,\,t-s)y(s)\,ds, \tag{1}$$

где $D(t)$ – матрицы размера $n\times n$ с непрерывно дифференцируемыми, T-периодическими элементами, $A(t)$ – матрицы размера $n\times n$ с непрерывными, T-периодическими элементами, $B(t,s)$ – матрицы размера $n\times n$ с непрерывными, T-периодическими по первой переменной элементами, т.е.

$$D(t)\equiv D(t+T), \quad A(t)\equiv A(t+T), \quad B(t,s)\equiv B(t+T,s).$$

Цель работы состоит в исследовании экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1) и получении оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности.

При исследовании устойчивости нулевого решения системы (1) используется функционал Ляпунова–Красовского, предложенный в [2]:

$$v(t,y) = \big\langle H(t)\big(y(t)+D(t)y(t-\tau)\big), \big(y(t)+D(t)y(t-\tau)\big)\big\rangle +$$
$$+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\big\langle K(t-s)y(s),y(s)\big\rangle\,ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t}\big\langle M(t-s,s)y(s),y(s)\big\rangle\,ds.$$

Данный функционал является аналогом функционала Ляпунова–Красовского из [1].

Введем обозначения:

$$R(t) = \frac{1}{\tau}\big(M(\tau,t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t)\big) - D^*(t)K(0)D(t),$$

$p^H_{min}(t)$ – минимальное собственное значение матрицы

$$P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t),$$

где

$$P(t) = \tau Q_{11}(t) - \tau Q_{12}(t)Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t) - \int\limits_0^{\tau} Q_{13}(t,s)Q_{33}^{-1}(s)Q_{13}^*(t,s)\,ds,$$

$$Q_{11}(t) = -\frac{1}{\tau}\Big(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + M(0,t)\Big) - K(0),$$

$$Q_{12}(t) = \frac{1}{\tau}\big(H(t)A(t) + M(0,t)\big)D(t) + K(0)D(t), \quad Q_{22}(t) = R(t),$$

$$Q_{13}(t,s) = -H(t)B(t,s), \quad Q_{33}(s) = K(s).$$

Теорема. *Пусть существуют T-периодическая гладкая матрица $H(t) = H(t)^* > 0$ и матрицы $K(s) = K^*(s) > 0$, $\frac{d}{ds}K(s) < 0$, $s \in [0,\tau]$, и $M(s,\xi) = M^*(s,\xi) > 0$, $\frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) < 0$, $s \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}$, такие, что*

$$R(t) > 0, \quad t \in [0,T], \quad \int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0,$$

где $\gamma_H(t) = \min\left\{p^H_{min}(t), k\right\}$, $k > 0$ – максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leqslant 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) + kM(s,\xi) \leqslant 0, \quad s \in [0,\tau], \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Тогда нулевое решение системы экспоненциально устойчиво.

Отметим, что помимо представленных достаточных условий экспоненциальной устойчивости получены конструктивные оценки решений системы (1), которые характеризуют экспоненциальное убывание решений на бесконечности.

Литература

1. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28.

2. Ыскак Т. *Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием* // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.

ON THE ROBUST STABILIZABILITY ANALYSIS OF THREE-TIME-SCALE LINEAR TIME-INVARIANT SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS WITH DELAY

C.A. Naligama, O.B. Tsekhan

Let $p \triangleq \frac{d}{dt}$ be the differentiation operator, $h = \mathrm{const} > 0$, e^{-ph} be the delay operator: $e^{-ph}v(t) = v(t-h)$, $e^{-jph}v(t) = v(t-jh)$. The following Three-time-scale Singularly Perturbed Linear Time-invariant System with Multiple Commensurate Delays in the slow state variables (TSPLTISD) is considered in the matrix-operator form:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\\ \dot{z}(t)\end{bmatrix} = A\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}\right)\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix} + B\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right)u(t), \;\; x \in \mathbb{R}^{n_1}, \;\; y \in \mathbb{R}^{n_2}, \;\; z \in \mathbb{R}^{n_3}, \qquad (1)$$

with initial conditions: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $x(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0)$.

Here,

$$A\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,e^{-ph}\right)=\begin{bmatrix} A_{11}\left(e^{-ph}\right) & A_{12} & A_{13}\\ \dfrac{A_{21}\left(e^{-ph}\right)}{\varepsilon_1} & \dfrac{A_{22}}{\varepsilon_1} & \dfrac{A_{23}}{\varepsilon_1}\\ \dfrac{A_{31}\left(e^{-ph}\right)}{\varepsilon_2} & \dfrac{A_{32}}{\varepsilon_2} & \dfrac{A_{33}}{\varepsilon_2}\end{bmatrix},\quad B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)=\begin{bmatrix} B_1\\ \dfrac{B_2}{\varepsilon_1}\\ \dfrac{B_3}{\varepsilon_2}\end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$A_{i1}\left(e^{-ph}\right)\triangleq\sum_{j=0}^{l}A_{i1j}e^{-jph},\quad i=\overline{1,3},$$

be matrix operators, $A_{i1j}, A_{i2}, A_{i3}, B_i,\ i=1,2,3,\ j=\overline{0,l}$, be constant matrices of appropriate dimensions; $0<\varepsilon_2\ll\varepsilon_1\ll 1$; $x,\ y,\ z$ are the slow, fast and fastest variables, respectively; $x_0\in\mathbb{R}^{n_1},\ y_0\in\mathbb{R}^{n_2},\ z_0\in\mathbb{R}^{n_3},\ \varphi(\theta),\ \theta\in[-h,0)$, is a piecewise continuous n_1-vector function; $u\in U,\ U$ is a set of piecewise continuous r-vector functions for $t\geqslant 0$.

Definition. For a given $\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0$ TSPLTISD (1) is considered *to be stabilizable* if there exists the linear feedback controller,

$$u(t)=\begin{pmatrix}F_1(e^{-ph}) & F_2 & F_3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\left(t\right)\\ y\left(t\right)\\ z\left(t\right)\end{bmatrix}, \tag{3}$$

with, $F_1(e^{-ph})\in\mathbb{R}^{r\times n_1},\ F_2\in\mathbb{R}^{r\times n_2}$ and $F_3\in\mathbb{R}^{r\times n_3}$, such that the closed-loop system (1), (2) is exponentially stable for the given, $\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0$ and $t\geqslant 0$.

If there exist numbers, $\varepsilon_1^*>0,\ \varepsilon_2^*>0$; for which TSPLTISD (1) is stabilizable for any $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_1^*]$ and $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_2^*]$, the complete stabilizability is robust with respect to the parameters $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$.

By $\mathbb{C}$, the set of complex numbers is denoted. Let's consider $S\left(\mathbb{C}\right)$ to be in the set of all the complex numbers $\mathbb{C}$ with negative real parts: $S\left(\mathbb{C}\right)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}\lambda<0\}$.

Applying for a given $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ to the TSPLTISD (1) the criterion [1] (Theorem 2.) for the stabilizabilty of the state delay system, we obtain:

Theorem 1. *For a given $\varepsilon_1>0$ and $\varepsilon_2>0$ the system (1) is stabilizable if and only if:*

$$\operatorname{rank}\left[\lambda I_{n_1+n_2+n_3}-A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,e^{-\lambda h}),B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)\right]=n_1+n_2+n_3\quad\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus S\left(\mathbb{C}\right). \tag{4}$$

Assumptions. $\det\ A_{33}\neq 0$ and $\det\ [A_{22}-A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}]\neq 0$.

Under the Assumptions the following n_1-dimensional degenerate system with delay (slow subsystem, DS), the n_2-dimensional ε_1-Boundary Layer System (ε_1-BLS) without delay and the n_3-dimensional ε_2-Boundary Layer System (ε_2-BLS) without delay can be obtained:

$$\dot{x}_s\left(t\right)=A_s\left(e^{-ph}\right)x\left(t\right)+B_su(t),\quad x_s\in\mathbb{R}^{n_1}, \tag{5}$$

$$\frac{d\hat{y}(\tau_{\varepsilon_1})}{d\tau_{\varepsilon_1}}=A_{f_{\varepsilon_1}}\hat{y}(\tau_{\varepsilon_1})+B_{f_{\varepsilon_1}}u_{f_{\varepsilon_1}}(\tau_{\varepsilon_1}),\quad \hat{y}\in\mathbb{R}^{n_2}, \tag{6}$$

$$\frac{d\hat{z}(\tau_{\varepsilon_2})}{d\tau_{\varepsilon_2}}=A_{f_{\varepsilon_2}}\hat{z}(\tau_{\varepsilon_2})+B_{f_{\varepsilon_2}}u_{f_{\varepsilon_2}}(\tau_{\varepsilon_2}),\quad \hat{z}\in\mathbb{R}^{n_3}. \tag{7}$$

Theorem 2. *The Degenerate System (5) of the TSPLTISD (1) is stabilizable if and only if:*

$$\operatorname{rank}\left[\lambda I_{n_1}-A_s(e^{-\lambda h}),B_s\right]=n_1,\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{S}\left(\mathbb{C}\right). \tag{8}$$

Similarly, the Theorems on the stabilizabilty of the ε_1-BLS(6), ε_2-BLS(7) are established.

Theorem 3. *Let the Assumptions be satisfied, the DS (4), the ε_2-BLS (6) and the ε_1-BLS (7) be stabilizable by a linear state feedback controls $F_s(e^{-ph})$, F_{ε_2}, F_{ε_1}, respectively, conditions*

$$\det\left(A_{33} + B_3F_3\right) \neq 0,$$
$$\det\left[(A_{22} + B_2F_2) - (A_{23} + B_2F_3)(A_{33} + B_3F_3)^{-1}(A_{32} + B_3F_2)\right] \neq 0, \tag{9}$$

where the matrix operator $F_1(e^{-ph})$ and matrices F_2 and F_3 are expressed in terms of the matrix parameters of the system (1) and $F_s(e^{-ph})$, F_{ε_2}, F_{ε_1}, are satisfied. Then, there exist ${\varepsilon_1}^* > 0$ and ${\varepsilon_2}^* > 0$ such that the TSPLTISD (1) is stabilizable for all $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$ and $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$, (i.e. robust with respect to the small parameters ε_1, ε_2) by a controller in the composite form (3).

Sketch of Proof. The proof follows [3,4] using the results from [2,5]. Consider a feedback law of the following form $u(t) = u_s(t) + u_1(\tau_{\varepsilon_1}) + u_2(\tau_{\varepsilon_2})$ where

$$u_s(t) = F_s(e^{-ph})x_s(t), \quad u_1(t) = F_{\varepsilon_1}\tilde{y}(\tau_{\varepsilon_1}), \quad u_2(t) = F_{\varepsilon_2}\tilde{z}(\tau_{\varepsilon_2}).$$

Then by replacing x_s by x, $\tilde{y}$ by $y - y_s$, $\tilde{z}$ by $z - z_s$, we obtain the control law of the form (3). Applying the feedback law (3) to TSPLTISD (1) we obtain a closed-loop system of the form of TSPLTISD (1). Since (9), then for sufficient small parameters the closed-loop system can be decomposed into the exact slow, fast and fastest subsystems by the appropriate nonsingular transformation [2, 5]. Then it is proved that the decoupled closed-loop system is asymptotically close to closed-loop subsystems: DS and BLSs, which, according to the assumption of the theorem, are stabilizable. Considering the preservation of the full rank of a matrix under the small regular perturbation, and by the Theorem 2, there exists $\varepsilon_1^* > 0, \varepsilon_2^* > 0$, for which the TSPLTISD (1) is stabilizable for any $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$ and $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$ with the composite control (3).

The results obtained are extensively discussed in an illustrative example for the further verification and demonstration of the findings of this study.

Aknowledgement. The work of Olga Tsekhan was supported under the state research program "Convergence-2025" of the Republic of Belarus: Task 1.2.04.

References

1. Gabelaya A. G., Ivanenko V. I., Odarich O. N., *Stabilizability of linear autonomous systems with delay* // Autom. Remote Control. 1976. V. 37(8). P. 1145-–1150.

2. Naligama C. A., Tsekhan O. B. *Decoupling of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay based on a nondegenerate transformation* // Vesnik GrDU Imja Janki Kupaly. Ser. 2 Matjematyka. 2021. P. 27–36.

3. Pawluszewicz E., Tsekhan O. *Stability and stabilisability of the singularly perturbed system with delay on time scales: a decomposition approach* // International Journal of Control. 2021.

4. Kokotovic P. V., Khalil H. K., O´Reilly J. *Singular perturbation methods in control: analysis and design.* Academic Press: London, UK, 1986.

5. Naligama C. A., Tsekhan O. B. *Asymptotic approximations of a decoupling transformation for three-time scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay* // Vesnik GrDU Imja Janki Kupaly. Ser. 2 Matjematyka. 2022. P. 25–36.

АВТОРЫ ДОКЛАДОВ

Александрович Т.А. tatyanka.aleksandrovich@mail.ru. Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь. С. 97.

Амелькин В.В. vamlkn@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 48.

Андреева Т.К. tatsyana.andreeva@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 3.

Бабаджанов Ш.Ш. sh.babadjanov@mail.ru. Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан. С. 50.

Бабич Е.Р. elena.bibilo@mail.ru. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 4.

Баландин А.С. balandin-anton@yandex.ru. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия. С. 81.

Барабанов Е.А. bar@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 20.

Белокурский М.С. drakonsm@ya.ru. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 51.

Бекряева Е.Б. evgenia.bekriaeva@gmail.com. Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь. С. 22.

Березкина Н.С. korotkaja3@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 3.

Бондарев А.Н. alex-bondarev@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилёв, Беларусь. С. 53.

Борухов В.Т. borukhov@im.bas-net.by. Институт математики НАН РБ, Минск, Беларусь. С. 55.

Бондарев А.А. albondarev1998@yandex.ru. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 24.

Булатов В.И. bulatov@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 83.

Быков В.В. vvbykov@gmail.com. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 20.

Ванькова Т.Н. vankova_tn@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 5.

Ветохин А.Н. anveto27@yandex.ru. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. С. 25.

Войделевич А.С. aliaksei.vaidzelevich@gmail.com. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 27.

Гончарова М.Н. m.gonchar@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 83.

Горячкин В.В. gorvv@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 86.

Громак В.И. vgromak@mail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 7.

Громак Е.В. lenagromak@tut.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 9.

Деменчук А.К. demenchuk@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 28.

Дмитрук Н.М. dmitrukn@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 88.

Евстафьева В.В. v.evstafieva@spbu.ru. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. С. 95.

Жабко А.П. zhabko.apmath.spbu@mail.ru. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. С. 90.

Жигалов В.С. zhigalovvs.98b@gmail.com. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. С. 90.

Изобов Н.А. izobov@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 30.

Ильин А.В. illine@cs.msu.ru. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 30.

Калинин А.И. kalinai@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 92.

Калитин Б.С. Kalitine@yandex.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 55.

Камачкин А.М. a.kamachkin@spbu.ru. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. С. 95.

Касабуцкий А.Ф. an_kasabutski@tut.by. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 31.

Кашпар А.И. alex.kashpar@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 101.

Кветко О.М tx1@tut.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 55.

Козлов А.А. kozlovaa@tut.by. Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь. С. 97.

Крахотко В.В. krakhotko@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 86, 100.

Кузьмина Е.В. elena_kuzmina@inbox.ru. Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест, Беларусь. С. 11.

Кузьмич А.В. kuzmich_av@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 59.

Кулеш Е.Е. kulesh@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 5.

Курбанбаев О.О. otebay58@mail.ru. Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан. С. 60.

Лавринович Л.И. lavrinovich@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 92.

Лаптинский В.Н. lavani@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилёв, Беларусь. С. 61.

Липницкий А.В. ya.andrei173@yandex.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 33.

Макаров Е.К. jcm@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 35.

Маковецкая О.В. olya.makzi@gmail.com. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 63.

Маковецкий И.И. imi.makzi@gmail.com. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 78.

Малыгина В.В. mavera@list.ru. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия. С. 101.

Цегельник В.В. tsegvv@bsuir.by. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 18.

Цехан О.Б. tsekhan@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 112, 118.

Чергинец Д.Н. cherginetsdn@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 74.

Чудинов К.М. cyril@list.ru. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия. С. 115.

Ыскак Т. istima92@mail.ru. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия. С. 117.

Akhmedov O.S. odiljon.axmedov@gmail.com. Uzbekistan Academy of Science, Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan. С. 76.

Astashova I.V. ast.diffiety@gmail.com. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia. С. 43.

Czornik A. adam.czornik@polsl.pl. Silesian University of Technology, Gliwice, Poland. С. 45.

Grin A.A. grin@grsu.by. Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus. С. 79.

Kryzhevich S.G. sergey.kryzhevich@pg.edu.pl. Gdańsk University of Technology, Gdańsk, Poland. С. 46.

Musafirov E.V. musafirov@bk.ru. Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus. С. 79.

Naligama C.A. naligama_ch_19@student.grsu.by. Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus. С. 118.

Niezabitowski M. michal.niezabitowski@polsl.pl. Silesian University of Technology, Gliwice, Poland. С. 45.

Pranevich A.F. pranevich@grsu.by. Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus. С. 79.

Sotvoldiyev A.I. akmal.sotvoldiyev@mail.ru. Tashkent Institute of Finance, Tashkent, Uzbekistan. С. 76.

СОДЕРЖАНИЕ

Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Асимптотическая теория дифференциальных уравнений

Качественная теория дифференциальных уравнений

Теория устойчивости и управления движением

Научное издание

XX Международная научная конференция
по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2022)

Материалы конференции

Часть 1

Редакторы *В. В. Амелькин, А. Б. Антоневич,*
А. И. Астровский, М. М. Васьковский, А. Л. Гладков,
В. И. Громак, А. К. Деменчук, А. А. Козлов, С. А. Мазаник, Е. К. Макаров
Компьютерная верстка *А. К. Деменчук, А. А. Козлов, Е. К. Макаров*

Подписано в печать 10.05.22. Формат $60 \times 84\,{}^1/_8$. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 14,36. Тираж 60 экз. Заказ 303.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.