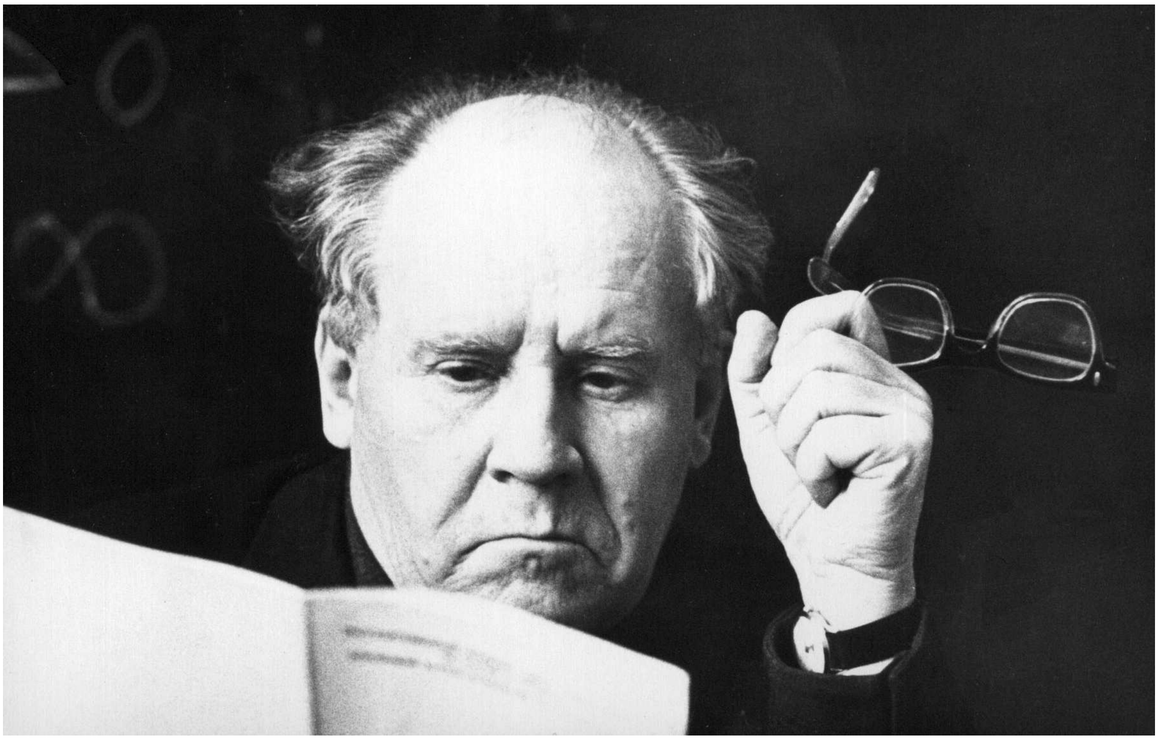
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2022)



Материалы конференции

Часть 2

Уравнения с частными производными
Интегро-дифференциальные операторы и уравнения
Дифференциальные уравнения и их приложения
Методика преподавания математических дисциплин в высшей школе

НОВОПОЛОЦК 2022

УДК 517.9
ББК 22.161.6я43
Д22

Р е д а к т о р ы:
В. В. Амелькин, А. Б. Антоневич, А. И. Астровский,
С. Ю. Башун, М. М. Васьковский, А. Л. Гладков, В. И. Громак,
А. К. Деменчук, А. А. Козлов, С. А. Мазаник, Е. К. Макаров

Д22 **XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2022):** материалы Международной научной конференции. Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022 г.: в 2 ч. — Ч. 2. — Новополоцк: Полоцкий государственный университет, 2022. — 156 с.

ISBN 978-985-531-796-9 (Часть 2)
ISBN 978-985-531-794-5

Сборник содержит доклады, представленные на XX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2022) по вопросам уравнений с частными производными, интегро-дифференциальных операторов и уравнений, дифференциальных уравнений и их приложений, методики преподавания математических дисциплин в высшей школе.

ISBN 978-985-531-796-9 (Часть 2)
ISBN 978-985-531-794-5

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Л.Н. Бондарь, С.Б. Мингнаров

В докладе рассматривается задача Коши для одной системы дифференциальных уравнений, не разрешенной относительно старшей производной по времени:

$$\begin{pmatrix} (I-\alpha D_x^2) & \varepsilon D_x^2 \\ \varepsilon D_x^2 & (I-\beta D_x^2) \end{pmatrix} D_t^2 U + c^2 \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} D_x^4 U - \delta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_x^2 U = F(t,x) \quad (1)$$

в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{t > 0,\, x \in \mathbb{R}\}$, где $\alpha,\ \beta > 1,\ c > 0,\ 0 < \varepsilon < 1,\ \delta \in \mathbb{R}$.

Системы дифференциальных уравнений вида (1) часто называют *уравнениями соболевского типа*, поскольку именно работы С.Л. Соболева (см., например, в [1, с. 333–447]) послужили началом систематического изучения таких уравнений.

Система (1) относится к классу псевдогиперболических уравнений, введенных Г.В. Демиденко в [2]. Системы такого вида возникают при описании волновой динамики в стержне (см., например, [3, 4]).

В вырожденном случае, когда $\varepsilon = 0$, система (1) распадается на два псевдогиперболических уравнения:

$$(I-\alpha D_x^2)D_t^2 u + c^2 D_x^4 u - \delta^2 D_x^2 u = f_1(t,x), \quad (2)$$

$$(I-\beta D_x^2)D_t^2 v + c^2 D_x^4 v = f_2(t,x).$$

Уравнение (2) в литературе называется *уравнением Власова* (см. [3, 4]), а также – *уравнением Рэлея–Бишопа* (см. [5, 6]). Теоремы о разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений см., например, [2, 7–9].

В работе доказывается однозначная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболической системы (1) в соболевских пространствах.

Литература

1. Соболев С.Л. *Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы.* Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал “Гео” изд-ва СО РАН, 2003.

2. Демиденко Г.В., Успенский С.В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск: Научная книга, 1998.

3. Власов В.З. *Тонкостенные упругие стержни.* Стройиздат, 1940.

4. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. *Задачи волновой динамики элементов конструкций.* Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2014.

5. Bishop R.E.D. *Longitudinal waves in beams* // Aeronautical Quarterly. 1952. V. 3. I. 4. P. 280–293.

6. Rao J.S. *Advanced Theory of Vibration.* John Wiley & Sons, 1992.

7. Demidenko G.V. *On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations* // Sib. Adv. Math. 2001. V. 11. № 4. P. 25–40.

8. Fedotov I., Volevich L.R. *The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative* // Russ. J. Math. Phys. 2006. V. 13. № 3. P. 278–292.

9. Демиденко Г.В. *Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений* // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ТИПА «РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ»

С.М. Бородич

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается система типа «реакция-диффузия»

$$\partial_t u = \Delta u - f(u,T), \quad \partial_t T = \Delta T + g(u,T), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\partial u/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \partial T/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь $u = u(x,t)$, $T = T(x,t)$, $\nu = \nu(x)$ – нормаль к $\partial\Omega$. Предполагается, что $f(u,T)$, $g(u,T) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и выполнены следующие условия:

$$\lim_{T\to+\infty} f(u,T) = \widetilde{f}(u), \quad \lim_{T\to+\infty} g(u,T) = \widetilde{g}(u), \quad \widetilde{f}(u), \widetilde{g}(u) \in C^1(\mathbb{R}),$$

$$c_0|u|^p - C \leqslant f(u,T)u \leqslant C(|u|^p + 1), \quad 0 < \varepsilon \leqslant g(u,T) \leqslant C\left(\frac{|u|^q}{1+|T|^\alpha} + |u|^r + 1\right),$$

$$f'_u\xi_1^2 + (f'_T - g'_u)\xi_1\xi_2 - g'_T\xi_2^2 \geqslant -C|\xi|^2 \ \ \forall\xi = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\widetilde{f}'(u) \geqslant c_0|\widetilde{g}'(u)|^2 - C, \quad |\widetilde{g}'(u)| \leqslant C(|u|^{r-1} + 1),$$

$$|f(u,T) - \widetilde{f}(u)| \leqslant h(T)(|u|^{p-1} + 1), \quad |g(u,T) - \widetilde{g}(u)| \leqslant h(T)(|u|^q + 1),$$

где

$$C,\, c_0 > 0, \quad p > 2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant p(1+\alpha)/2,$$

$$q < p/2 + 4/(n-2) \ \text{при} \ n \geqslant 3, \quad 1 \leqslant r \leqslant p/2,$$

$$h(T) \in C(\mathbb{R}),\ \ h(T) \ \text{ограничена и монотонно убывает на} \ \mathbb{R}, \quad \lim_{T\to+\infty} h(T) = 0.$$

Пусть $E = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Стандартными методами (см. [1, 2]) устанавливается, что задача (1), (2) порождает в пространстве E полугруппу операторов $\{S_t,\ t \geqslant 0\}$:

$$S_t : (u_0, T_0) \to \big(u(t), T(t)\big),$$

где $(u_0, T_0) \in E$, $\big(u(t), T(t)\big)$ – решение задачи (1), (2) с начальным условием

$$\big(u(t), T(t)\big) = (u_0, T_0).$$

Для произвольной интегрируемой по Лебегу на Ω функции φ через $\langle\varphi\rangle$ обозначим ее среднее значение в этой области: $\langle\varphi\rangle = (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}\int\limits_\Omega \varphi(x)\,dx$.

Пусть $V = \{\varphi \in L_2(\Omega) : \ \langle\varphi\rangle = 0\}$; (u,T) – решение задачи (1), (2) с начальным условием из E. Представим компоненту T в виде суммы $T = T_1 + T_2$, где $T_2 = \langle T\rangle$ (очевидно, что $T_1(t) \in V \ \forall t \geqslant 0$). Из (1), (2) получаем

$$\partial_t u = \Delta u - f(u, T_1 + T_2), \qquad \partial u/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

$$\partial_t T_1 = \Delta T_1 + G_1(u, T_1 + T_2), \quad \partial T_1/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

$$\partial_t T_2 = G_2(u, T_1 + T_2), \tag{5}$$

где $G_1(u,T_1+T_2) = g(u,T_1+T_2) - \langle g(u,T_1+T_2)\rangle$, $G_2(u,T_1+T_2) = \langle g(u,T_1+T_2)\rangle$. Заметим, что из (5) и условия $g(u,T) \geqslant \varepsilon > 0$ следует: $T_2(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Рассмотрим задачу, в некотором смысле предельную при $T_2 \to +\infty$ для задачи (3), (4):

$$\partial_t \widetilde{u} = \Delta\widetilde{u} - \widetilde{f}(\widetilde{u}), \quad \partial_t \widetilde{T}_1 = \Delta\widetilde{T}_1 + \widetilde{G}_1(\widetilde{u}), \tag{6}$$

$$\partial\widetilde{u}/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \partial\widetilde{T}_1/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{7}$$

где $\widetilde{G}_1(\widetilde{u}) = \widetilde{g}(\widetilde{u}) - \langle\widetilde{g}(\widetilde{u})\rangle$. Начальные данные этой задачи берутся в пространстве

$$E_1 = L_2(\Omega) \times V \subset E.$$

Для любых непустых множеств $X, Y \subset E$ положим $\operatorname{dist}_E(X,Y) = \sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y} \|x-y\|_E$.

Методами, изложенными в [2], доказывается, что задача (6), (7) порождает в пространстве E_1 полугруппу операторов $\{\widetilde{S}_t,\ t \geqslant 0\}$, обладающую максимальным аттрактором $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset E_1$. (Следуя [2], *максимальным аттрактором* полугруппы операторов $\{\widetilde{S}_t\}$ называем такое компактное в E_1 и инвариантное относительно операторов полугруппы множество $\mathcal{A}$, что для любого ограниченного в E множества $B \subset E$ $\operatorname{dist}_E(\widetilde{S}_t B, \mathcal{A}) \to 0$ при $t \to +\infty$).

Определим отображения $\Pi_1 : E \to E_1$ и $\Pi_2 : E \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\Pi_1 : (u,T) \to (u,T_1), \quad \Pi_2 : (u,T) \to T_2$$

для любых $(u,T) \in E$, где $T = T_1 + T_2$, $T_2 = \langle T\rangle$.

Теорема. *Пусть B – ограниченное в E множество. Тогда*

$$\operatorname{dist}_E(\Pi_1 S_t B, \mathcal{A}) \to 0 \quad \text{и} \quad \inf \Pi_2 S_t B \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

где $\{S_t\}$ – полугруппа, порожденная в пространстве E задачей (1), (2).

Литература

1. Лионс Ж.–Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир, 1972.
2. Бабин А. В., Вишик М. И. *Аттракторы эволюционных уравнений.* М.: Наука, 1989.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев

В настоящее время активно изучаются краевые задачи с интегральными условиями. Краевые задачи с интегральным условием для гиперболического уравнения были рассмотрены в работе [1]. Гиперболическое уравнение с оператором Бесселя и с нелокальным интегральным условием изучено в работе [2], а параболическое уравнение с оператором Бесселя в работах [3, 4].

Пусть $G_T = \{(x,t) :\ 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$ – прямоугольная область в координатной плоскости Oxt.

В области G_T рассмотрим параболическое уравнение

$$L_B u \equiv u_t - B_x u = 0,$$

где $B_x = x^{-k}\dfrac{\partial}{\partial x}(x^k\dfrac{\partial}{\partial x}) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{k}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}$ – оператор Бесселя, $0 < k < 1$.

Рассматривается задача о нахождении функции $u(x,t)$, удовлетворяющей условиям:

$$u(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{G}_T) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_T), \tag{1}$$

$$L_B u = 0, \quad (x,t) \in G_T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\left(x^{k-1}u(x,t)\right)\Big|_{x=1} + \int\limits_0^l u(x,t)x dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию согласования

$$\left(x^{k-1}\varphi(x)\right)\Big|_{x=1} + \int\limits_0^l \varphi(x)x dx = 0. \tag{6}$$

Теорема. *Задача (1)–(6) не может иметь более одного решения.*

Литература

1. Пулькина Л. С. *Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода* // Изв. вузов. Матем. 2012. № 4. С. 74-83.

2. Зайцева Н. В. *Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя.* М: Изд-во Московского университета, 2021.

3. Bouziani A., Oussaeif T.-E. and Benaoua L. *A Mixed Problem with an Integral Two-Space-Variables Condition for Parabolic Equation with The Bessel Operator* // Journal of Mathematics. 2013. Article ID 457631.

4. Гарипов И. Б., Мавлявиев Р. М. *Краевая задача для одного параболического уравнения с оператором Бесселя с интегральным условием первого рода* // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. В. 1. С. 5–12.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЯТОГО ПОРЯДКА

В.В. Дайняк, А.К. Андросов

В данной работе изучается задача типа Дирихле на плоскости для уравнений определенного вида пятого порядка с постоянными коэффициентами. Эти неклассические линейные дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x = (x_0, x_1)$ запишем в виде

$$\mathfrak{L}u = \Big(\frac{\partial^3}{\partial x_0^3} + a_1\frac{\partial^3}{\partial x_0 \partial x_1^2} + b_1\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big) + A(x_0,x_1)u = f(x_0,x_1), \tag{1}$$

где $A(x_0,x_1)u = q_0(x_0,x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_0} + q_1(x_0,x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda(x_0,x_1)u$. Здесь a_1, b_1 – постоянные, коэффициенты полинома $A(x_0,x_1)$ и их производные $\frac{\partial q_i}{\partial x_0}$ $(i = 1,2)$ измеримы и ограничены. При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$, которые будут сформулированы далее и которые являются достаточными, методами функционального анализа доказывается в обобщенной постановке однозначная разрешимость уравнения (1) в произвольной области при наличии простейших граничных условий (условий типа Дирихле). Суть постановки задачи в следующем. Обозначим через Ω произвольную ограниченную область двумерного пространства переменных $x = (x_0, x_1)$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$.

Пусть $\mathfrak{L}_0(\nu) = (\nu_0^3 + a_1\nu_0\nu_1^2 + b_1\nu_1^3)(\nu_0^2 + \nu_1^2)$. В области Ω рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}|_{\partial\Omega^-} = 0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ – часть границы $\partial\Omega$ в точках которой $\mathfrak{L}_0(\nu) < 0$.

Наряду с задачей (1), (2) будем рассматривать сопряженную задачу, т.е.

$$\mathfrak{L}^+ v = g(x), \tag{3}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}|_{\partial\Omega^+} = 0, \quad \partial\Omega^+ = \big(x \in \Omega \,|\, \mathfrak{L}_0(\nu) > 0\big), \tag{4}$$

где $\mathfrak{L}^+$ – формально сопряжённый к $\mathfrak{L}$ оператор и

$$\mathfrak{L}^+ = -\Big(\frac{\partial^3}{\partial x_0^3} + a^{(1)}\frac{\partial^3}{\partial x_0 \partial x_1^2} + b^{(1)}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big) + A^*(x_0, x_1),$$

где $A^*(x_0, x_1)$ – оператор первого порядка, формально сопряженный к $A(x_0, x_1)$.

Для исследования на разрешимость поставленных задач нам нужны некоторые функциональные пространства. Обозначим $H^l(\Omega)$ $(l = 1, 2, 3)$ пространство Соболева функций, определенных в Ω с квадратично суммируемыми обобщенными производными до порядка l, $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. Пусть $H_0^l(\Omega)(\overset{0}{H^l}(\Omega))$, $l = 1, 2, 3$, – подпространства пространства $H^l(\Omega)$, элементы которых удовлетворяют условиям (2), ((4)). Здесь $H_0^l(\Omega) = \overset{0}{H^l}(\Omega)$. Пусть $H_0^{-1}(\Omega)$ – сопряженное к $H_0^l(\Omega)$ пространство относительно канонической билинейной формы $\langle u, v\rangle$, $u \in H_0^{-1}(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$, являющейся продолжением по непрерывности билинейной формы $(u, v)_{L_2(\Omega)}$, где $u \in L_2(\Omega)$, $v \in H_0^l(\Omega)$, $(\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Задачу (1), (2) будем рассматривать как решение операторного уравнения

$$\mathfrak{L}u = f \tag{5}$$

с областью определения $D(\mathfrak{L}) = H_0^3(\Omega)$, а задачу (3), (4) как решение операторного уравнения

$$\mathfrak{L}^* v = g \tag{6}$$

с $D(\mathfrak{L}^*) = \overset{0}{H^3}(\Omega)$.

Построим расширение L и L^+. Будем рассматривать L и L^+ из пространства $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^{-1}(\Omega)$. В качестве расширений L и L^+ возьмем сопряженные операторы к операторам $\mathfrak{L}^+$ и $\mathfrak{L}$ соотвественно, действующие из $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^{-1}(\Omega)$. Решение уравнения

$$Lu = f \tag{7}$$

назовем *обобщенным решением задачи (1), (2) или уравнения (5)*, а решение уравнения

$$L^{+}u = g \tag{8}$$

– обобщенным решением задачи (3), (4) или уравнения (6).

Имеют место следующие энергетические неравенства для операторов L и L^{+}.

Теорема 1. *Если выполняются следующие условия:*

1) $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$;

2) если $a_1 = -1$, *то* $b_1 \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$;

3) если $a_1 = 0$, *то* $b_1 \in (-\infty, -\frac{\sqrt{-942 + 266\sqrt{57}}}{96}) \cup (\frac{\sqrt{-942 + 266\sqrt{57}}}{96}, +\infty)$;

4) если $a_1 = 1$, *то* $b_1 \in (-\infty, -1.21) \cup (1.21, +\infty)$,

то для любых u *и* v *из* $H_0^1(\Omega)$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\|Lu\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{9}$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c^{*}\|L^{+}v\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{10}$$

где постоянные $c > 0$ *и* $c^{*} > 0$ *не зависят от функций* u *и* v.

Теорема 2. *При выполнении условий Теоремы 1 для любого элемента* $f \in H_0^1(\Omega)$ *существует единственное обобщенное решение* u *задачи (1)–(2), а для любого элемента* $g \in H_0^1(\Omega)$ *существует единственное обобщенное решение* v *задачи (3)–(4) и справедлива оценка*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant k\|f\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{11}$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant k^{*}\|g\|_{H_0^{-1}(\Omega)}. \tag{12}$$

.

Литература

1. Корзюк В. И. *Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными* / Минск: БГУ, 2013.

2. Корзюк В. И. *Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка* // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2012. № 3. С. 116–121.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г.В. Демиденко

В монографии [1] исследовались краевые задачи для классов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной,

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор. В литературе такие уравнения часто называют *уравнениями соболевского типа*. Большой интерес к таким уравнениям был инициирован исследованиями С. Л. Соболева [2] задачи о малых колебаниях вращающейся жидкости. В настоящее время существует много теоретических и прикладных исследований задач для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. Уравнения вида (1) возникают при моделировании различных процессов [1]. В конце прошлого века с ростом количества статей по этим уравнениям "стала очевидной" некоторая классификации уравнений вида (1). Проанализировав большое число работ, авторы [1] выделили три класса уравнений: уравнения соболевского типа, псевдопараболические уравнения и псевдогиперболические уравнения.

При изучении задачи Коши для псевдогиперболических уравнений (1) с постоянными коэффициентами в работах [1, 3] впервые были получены энергетические оценки и доказаны теоремы о разрешимости в весовых соболевских пространствах. Отметим, что уравнения вида (1), рассмотренные в [1, 3], не содержали младших членов (в обобщенном смысле). Аналогичные результаты для класса уравнений, содержащих младшие члены, получены в работе [4]. Некоторый класс псевдогиперболических уравнений, удовлетворяющих условию изотропности, был рассмотрен в [5].

В настоящей работе мы вводим класс псевдогиперболических систем

$$L(D_x)D_tU + M(D_x)U = F(t,x),$$

где $L(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, и рассматриваем задачу Коши для таких систем. В случае, когда символы операторов $L(D_x)$, $M(D_x)$ квазиоднородны, получены энергетические оценки, установлены условия однозначной разрешимости в весовых соболевских пространствах. Аналогичные результаты получены в случае, когда символы $L(i\xi)$, $M(i\xi)$ не являются квазиоднородными при условии, что $\det L(i\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск: Научная книга, 1998.

2. Соболев С. Л. *Избранные труды.* Т. 1, 2. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал "Гео" Изд-ва СО РАН, 2003, 2006.

3. Demidenko G. V. *On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations* // Siberian Advances in Mathematics. 2001. V. 11. № 4. P. 25–40.

4. Демиденко Г. В. *Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений* // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.

5. Fedotov I., Volevich L. R. *The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative* // Russian Journal of Mathematical Physics. 2006. V. 13. № 3. P. 278–292.

О НЕЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ УГЛОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

И.В. Денисов, А.И. Денисов

Сингулярно возмущенные системы параболических уравнений вида

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u\right) = f(u,v,x,t,\varepsilon), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u,v,x,t,\varepsilon),$$

где Δ – оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, x_3)$, возникают при математическом описании химических реакций с учетом диффузии. Компоненты вектор-функций u и v являются концентрациями реагирующих веществ, а малый параметр ε – величиной, обратной константам скоростей быстрых реакций. Такого же типа системы появляются и в других прикладных задачах. Чтобы упростить изложение алгоритма, обычно ограничиваются случаем, когда медленные переменные отсутствуют (нет второго уравнения), а x – одномерная переменная. Кроме того, для удобства записи малый параметр при производных обозначают через ε^2.

На протяжении последних сорока лет наиболее интенсивно системы подобного вида изучались в областях с угловыми точками границы. Достаточно эффективным оказался метод угловых пограничных функций, впервые примененный В. Ф. Бутузовым для разностного уравнения в 1972 году. В 1978 году этот метод был распространен на параболическое уравнение (см. [1]). В прямоугольнике

$$\Omega := \{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$$

была рассмотрена задача

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \Omega,$$

с начальным условием

$$u(x,0,\varepsilon) = \phi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

и краевыми условиями первого рода

$$u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где функция F предполагалась линейной по переменной u. Обыкновенных погранфункций, которые определялись из обыкновенных дифференциальных уравнений, оказалось недостаточно для построения асимптотики решения. Потребовались еще и угловые погранфункции, которые определялись из линейных параболических уравнений с постоянными коэффициентами. Впоследствии В. Ф. Бутузовым и его учениками были рассмотрены разнообразные прикладные задачи, исследование которых проводилось с помощью метода угловых погранфункций. В работах рассматривались либо линейные задачи, либо нелинейные задачи с краевыми условиями второго рода.

Задача с нелинейной по переменной u функцией F и краевыми условиями первого рода впервые была рассмотрена в 1991 году для эллиптического уравнения. В [2] было начато формирование нелинейного метода угловых пограничных функций. Первоначально с помощью этого метода была рассмотрена задача с квадратичной по переменной u функцией F. Для угловых погранфункций получались нелинейные уравнения того же типа, что и исходное уравнение. Для доказательства существования подходящих решений таких уранений был использован метод верхних и нижних решений. Были построены барьерные функции специального вида, которые были в дальнейшем модифицированы для более общих задач. Потребовалось конструировать барьерные функции, состоящие из нескольких кусков, с последующим сглаживанием этих кусков. Исследования в этом направлении (см. [3–7] позволили значительно расширить класс нелинейностей.

Литература

1. Бутузов В. Ф., Нестеров А. В. *Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа* // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 1978. № 2. С. 49–56.

2. Денисов И. В. *Об асимптотическом разложении решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения в прямоугольнике* // Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: Сб. научн. тр. Бишкек: Илим, 1991. С. 37.

3. Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 1–11.

4. Денисов А. И., Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 102–117.

5. Денисов А. И., Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 9. С. 1581–1590.

6. Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 256–267.

7. Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 1894–1903.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕПРЕРЫВНОЙ СИЛЫ И СИЛ ИМПУЛЬСНОЙ ПРИРОДЫ

К.К. Елгондиев, Ю.Р. Кутлымуратова

Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях струны с закрепленными концами под воздействием внешней непрерывной силы и сил импульсной природы, действующих на процесс колебания струны в фиксированные моменты времени. Математически эта задача является задачей решения линейного неоднородного уравнения колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t \neq t_k, \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

и условиями импульсных воздействий вида

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial t}\,|_{t=t_k} = \frac{\partial u(x, t_k+0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t_k-0)}{\partial t} = I_k(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $t_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, – моменты импульсных воздействий, а $I_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, – соответствующие t_k, $k \in \mathbb{N}$, величины импульсных воздействий.

Относительно моментов импульсных воздействий предположим, что $t_k > t_m$ при $k > m$ и $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Определение. *Решением задачи (1)–(4)* называется функция

$$u(x,t) \in C\big([0,l] \times [0,+\infty)\big) \cap C^2\big([0,l] \bigcup_{k=0}^{\infty} (t_k, t_{k+1})\big),$$

имеющая непрерывную справа производную по t при $t = t_k$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющая уравнению (1) при $t \neq t_k$, $k \in \mathbb{N}$, граничным условиям (2), начальным условиям (3) и при $t = t_k$ условиям импульсных воздействий (4).

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2)–(4), ищем в виде:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{5}$$

по собственным функциям $\lambda_n = \sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \ldots,$ задачи Штурма–Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

где функции $T_n(t)$, $n = 1, 2, ...,$ определяются из уравнений

$$T_n{}''(t) + \omega_2^n T_n(t) = f_n(t), \quad t \neq t_k, \tag{6}$$

при начальных условиях

$$T_n(0) = \varphi_{0n}, \quad T_n{}'(0) = \varphi_{1n}, \tag{7}$$

и условиях импульсного воздействия

$$\Delta T_n{}'(t)\,|_{t=t_k} = I_{kn}\,, \tag{8}$$

Здесь k, $n \in \mathbb{N}$ и введены следующие обозначения

$$\varphi_{0n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx; \;\; \varphi_{1n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx; \;\; I_{kn} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l I_k(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Решение задачи (6)-(8) имеет вид

$$T_n(t) = \varphi_{01}\cos\omega_n t + \frac{\varphi_{1n}}{\omega_n}\sin\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{t_0}^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau + \sum_{0\leqslant t_i<t}\frac{I_{in}}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_i).$$

Подставив найденные выражения для $T_n(t)$ в ряд (5), получим решение задачи (1)–(4). Показано, что такая сходимость рядов будет обеспечена, если потребовать равномерную по n ограниченность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} I_{kn}$ и чтобы непрерывная функция $f(x,t)$ имела непрерывные частные производные по x до второго порядка и при всех значениях t выполнялись условия $f(0,t) = f(l,t) = 0$, $I_k(0) = I_k(l) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Литература

1. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. *Impulsive differential equations* // World Scientific Series on Non-linear Sciences. Ser. A. V. 14. Singapore: World Scientific, 1995.

2. Самойленко В. Г., Елгондиев К. К. *Исследование линейных дифференциальных уравнений в* $\mathbb{R}^2$. / Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 89.59. Киев, 1989. 32 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Б.Ж. Кадиркулов, М.А. Жалилов

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1-\operatorname{sign} x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1+\operatorname{sign} x}{2}\,{}_C D_{0y}^{\alpha}\right) = 0, \tag{1}$$

где ${}_C D_{0y}^{\alpha}\varphi(t) = I_{0+}^{1-\alpha}\varphi'(t)$ – оператор интегро-дифференцирования в смысле Капуто [1].

Определение. Функцию $u(x,y)$ будем называть *регулярным решением* уравнения (1), если она обладает непрерывными производными, входящими в это уравнение и удовлетворяет ему.

Пусть Ω – односвязная область плоскости независимых переменных x, y, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0 прямых $x=1$, $y=0$, $y=1$ соответственно и характеристиками $AC: x+y=0$ и $A_0C: x-y=-1$ уравнения (1), выходящими из точек $A\,(0,0)$, $A_0\,(0,1)$, и пусть

$$\Omega_1=\Omega\cup A_0B_0\cap\{x>0\}\,,\quad \Omega_2=\Omega\cap\{x<0\}\,.$$

Для уравнения (1) в области Ω рассмотрим следующую задачу:

Задача. Требуется найти функцию $u(x,y)$, непрерывную в замкнутой области $\bar{\Omega}$, которая:

1) является регулярным решением уравнения (1) в области Ω при $x\neq 0$;

2) удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{y=0}=\varphi\,(x)\,,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$u|_{x=1}=f\,(y)\,,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1,$$

$$u|_{A_0C}=\psi_1\,(y)\,,\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{A_0C}=\psi_2\,(y)\,,\quad \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_3\,(y)\,,\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1}{2},$$

где φ, f, ψ_1, ψ_2, ψ_3 – заданные функции.

При определенных условиях на заданные функции, используя метод функции Грина, доказаны теоремы о единственности и существовании решения рассматриваемой задачи.

Литература

1. Kilbas A. A., Sirivastava H. M., Turijilo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations.* / North-Holland Mathematics studies, 204. Elsevier Science B. M. Amsterdam: 2006.

2. Жураев Т. Д., Сапуев А. *О краевых задачах для уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа. Краевые задачи механики сплошных сред.* / Ташкент: изд-во ФАН, 1982.

3. Kadirkulov B. J. *Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative* // EJDE, 2014. № 57. P. 1–7.

КОРРЕКТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФАХ

Б.Е. Кангужин

Колебательные процессы конструкций, состоящих из стержней и соединенных в узлах, моделируются системами обыкновенных дифференциальных уравнений на предельных геометрических графах. Причем на каждой дуге графа возникает система дифференциальных уравнений, имеющих разные порядки. Дифференциальные системы с подобным эффектом на геометрических графах мало исследованы. Поэтому актуальным представляется изучение корректных постановок краевых задач для таких систем на графах. При этом возникает вопрос, во-первых, выбор условий согласований во внутренних вершинах графа и, во-вторых, определение условий закреплений в граничных вершинах графа.

Для исследования собственных частот колебаний конструкций, состоящих из множества стержней, возникают задачи на собственные значения для систем указанного выше вида на геометрических графах.

В докладе обсуждаются теоремы о локализации спектров указанных задач.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОГО КРАЕВОГО УСЛОВИЯ В СТЕРЖНЕВОМ ТЕЧЕНИИ

С.С. Каянович

Рассмотрим задачу (1)–(6) [1]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_{iT}, \ \ i = 1,2, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (x,t) \in \Omega'_T, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T, \tag{3}$$

$$u_1 \left|_{t=0} = \bar{b}(x), \ x \in \bar{\Omega}, \quad u_1 \right|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s,t), \ (s,t) \in \tilde{S}_T, \quad u_2 \Big|_{S_{\bigcup T}} = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{S'_{1T}} = - \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{S'_{1T}}, \quad u_2|_{S'_{2T}} = - \int\limits_{H}^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1,z,t)}{\partial x_1}\, dz, \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \,|_{\tilde{S}_T} = \zeta(s) \sum_{j=1}^{2} \omega_j(s,t) \cos\alpha_j, \ \ \omega_i = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}, \ \ i = 1,2, \ \ (s,t) \in \tilde{S}_T, \tag{6}$$

где $\dfrac{\partial p}{\partial \bar{n}} \,|_{\tilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ внешней нормали к поверхности $\tilde{S}_T$. Все обозначения в (1)–(6) содержатся в [1]. В работах [1, 2] доказано, что система уравнений стержневого течения имеет единственное решение при любом $t = t_m = m\tau$ (при достаточно малом τ), причём $u_{1,m} \in C_{l,\alpha}\left(\bar{\tilde{\Omega}}_m\right)$, $p \in C_{l-1,\alpha}\left(\bar{\tilde{\Omega}}_m\right)$. Встаёт вопрос о численном нахождении решения. Для этого будет применён метод конечных разностей, при котором задача (1)–(6) заменяется разностной задачей, её аппроксимирующей. Порядок точности разностной задачи совпадает с порядком аппроксимации [3] (обозначения теории разностных схем см. в [3]).

Разностная схема для задачи (1), (4) на равномерной по шагам h, τ сетке рассматривалась в [4]. Поэтому сразу переходим к уравнению (3) и условиям (6). Уравнение (3) содержит частные производные, аналогичные производным из (1), поэтому их аппроксимация будет аналогичной. Остановимся на описании в разностном виде условий (6). Учитывая нулевые условия для функций u_1 и u_2 на частях границы

$$l_1 \cup l_2 \colon \Big[\frac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \frac{\delta}{2}; x_2 = 0 \cup x_2 = H\Big],$$

взятых при значении $t = t_m$, а также определение срезающей функции $\zeta(x)$, замечаем, что левее прямой $x_1 = \dfrac{\delta}{2}$ и правее прямой $x_1 = L - \dfrac{\delta}{2}$ условия для нормальной производной $\dfrac{\partial p}{\partial \bar{n}}\,|_{l_i}$, $i = 1, 2$, обращаются в нуль (см. [1]). На частях же $l_1 \cup l_2$ ненулевым остаётся только слагаемое $\nu \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$. При этом, например, на l_1 условие

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\bigg|_{l_1} = -\frac{\partial p}{\partial x_2}\bigg|_{l_1} = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$$

можно взять в виде $\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\bigg|_{l_1} = 0$ (см. [5], а также [6], гл. IV, § 39).

Займёмся аппроксимацией краевого условия $\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\bigg|_{l_1} = 0$. Далее применяем обозначения $p(x_1, x_2, t_m) = p(x_2)$, т.е. зависимость от переменных x_1 и t явно не указываем, $\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\bigg|_{l_1} = p'_{x_2}$, для разностной производной используем обозначение p_{x_2} (штрих отсутствует). Производную $p'_{x_2}(0)$ заменяем правой разностной производной $y_{x_2}(0) = \dfrac{y(h) - y(0)}{h}$ и краевое условие при $x_2 = 0$ напишем в виде $y_{x_2}(0) = 0$ (y есть сеточная функция для функции p). Для погрешности $z = y - p$ получаем $z_{x_2}(0) = y_{x_2}(0) - p_{x_2}(0)$. Разлагая $p(x_2)$ в окрестности узла $x_2 = 0$ по формуле Тейлора: $p(h) = p(0) + hp'(0) + 0,5h^2 p''(0) + O(h^3)$, находим

$$p_{x_2}(0) = p'(0) + 0,5hp''(0) + O(h^2) \tag{7}$$

(производные функции p есть производные по переменной x_2). Видим, что погрешность аппроксимации для краевого условия есть $O(h)$. Подправим условие $y_{x_2}(0) = 0$ так, чтобы порядок аппроксимации составлял $O(h^2)$, используя тот факт, что $p(x_2)$ есть решение исходной задачи (3), (6) (см. [3]). Выразим из уравнения (3) $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(0) = p''_{x_2 x_2}(0)$:

$$p''_{x_2 x_2}(0) = -p''_{x_1 x_1}(0).$$

Подставляя это $p''_{x_2 x_2}(0)$ в (7), получим

$$p_{x_2}(0) + 0,5hp''_{x_1 x_1}(0) = p'(0) + O(h^2), \tag{8}$$

т.е. выражение в левой части (8) аппроксимирует $p'(x_2)$ в точке $x_2 = 0$ на решении (3) со 2-м порядком. Подправив краевое условие, получим 2-ой порядок аппроксимации.

Для дальнейшего заметим, что непосредственно к стенке $x_2 = 0$ прилегает тонкая прослойка жидкости, в которой средняя скорость меняется по линейному закону ([6], гл. IV, § 42). Следовательно, справедливо считать, что в реальном течении $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0$ (при $x_2 = 0$). Далее замечаем, что, в силу (1), при $x_2 = 0$ имеем равенство

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2},$$

т.е. $p'_{x_1}(0) = 0$, $\dfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \dfrac{\delta}{2}$. Отсюда следует, что $p''_{x_1 x_1}(0) = 0$, т.е. само условие $y_{x_2}(0) = 0$ имеет второй порядок аппроксимации на решении уравнения (3) (см. [3]).

Литература

1. Каянович С. С. *Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.

2. Каянович С. С. *О разрешимости дифференциально-разностной задачи для стержневого течения* // Тезисы докл. XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017». Ч. 2. Мн., 2017. С. 10–11.

3. Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем.* / М.: Наука, 1971.

4. Каянович С. С. *Об одном разностном методе для нестационарных модифицированных уравнений Навье–Стокса* // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 2. С. 36–40.

5. Каянович С. С. *Стержневое течение вязкой жидкости* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-техн. навук. 2013. № 3. С 32–35.

6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика.* / М.: Наука, 1988.

ЗАДАЧА ГУРСА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Корзюк, О.А. Ковнацкая

Получено классическое решение задачи для квазилинейного гиперболического уравнения в случае двух независимых переменных с заданными условиями для искомой функции на характеристических линиях. Задача сводится к системе уравнений с вполне непрерывным оператором. Решение строится методом последовательных приближений [1]. Проводятся обоснования. Кроме того, показана для рассмотренной задачи единственность полученного классического решения. Доказаны необходимые и достаточные условия согласования заданных функций из рассмотренной задачи, при выполнении которых классическое решение ее существует при наличии определенной гладкости заданных функций.

1. Постановка задачи. На плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\mathfrak{L}u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}) = a(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}^2 u + 2b(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2} u + c(\boldsymbol{x})\partial_{x_2}^2 u + \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

относительно искомой функции $u\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, где a, b, c, f – заданные функции на всей плоскости. Оператор $\mathcal{L}^{(1)}$ рассматриваем как функцию $\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ от переменных $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, которая удовлетворяет следующему условию Липшица.

Условие 1. *Для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ существует константа $L \in \mathbb{R}$, для которой при любых $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ из $\mathbb{R}^3$ выполняется неравенство*

$$|\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})| \leqslant L|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|. \qquad (2)$$

Условие 2. *На всей плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнение (1) является гиперболическим, т. е. дискриминант, составленный из коэффициентов главной части его оператора $\mathfrak{L}$, является положительным:*

$$b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x}) \geqslant A > 0 \qquad (3)$$

для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ и некоторой положительной константы A из множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Будем считать, что коэффициент $a(\boldsymbol{x}) \neq 0$ или $c(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Из условия 2 следует, что уравнение (1) имеет два семейства характеристик $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = C_1$ и $\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C_2$, которые являются решениями соответствующего уравнения характеристик

$$a(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_2)^2 - 2b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + c(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_1)^2 = 0. \tag{4}$$

К уравнению (1) присоединим условия Дирихле

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(1)}} = \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(1)}, \tag{5}$$

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(2)}} = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(2)}, \tag{6}$$

которые задаются на характеристиках

$$\gamma^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \mid \varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = C_1^{(0)}\} \quad \text{и} \quad \gamma^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \mid \varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C_2^{(0)}\},$$

которые пересекаются в некоторой точке $\mathcal{M}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$.

Определение 1. *Функцию u из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$ назовем классическим решением задачи (1), (5), (6), если она удовлетворяет уравнению (1) и условиям (5), (6).*

2. Основной результат.

Теорема. *Пусть функции a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. При указанных условиях гладкости заданных функций a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, $\psi^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ и f существует единственное классическое решение $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ задачи (1), (5), (6) тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования*

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}).$$

Литература

1. Корзюк В. И. *Уравнения математической физики.* М.: Ленанд, 2021.

2. Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Сериков В. П. *Задачи для одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках и нехарактеристических линиях* // Труды Института математики. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 106–112.

ЗАДАЧА СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А.Н. Миронов, А.П. Волков

Системы уравнений гиперболического типа исследовались многими авторами (см., например [1-3] и литературу при этих статьях). В работе [4] предложен вариант метода Римана для системы дифференциальных уравнений с кратными характеристиками, в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. Полученные результаты применялись к исследованию граничных задач для гиперболических систем, в том числе с кратными характеристиками [5–9].

Здесь речь идет о системе уравнений с кратными характеристиками с двумя независимыми переменными

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x,y)v_x + b_1(x,y)u + c_1(x,y)v + f_1(x,y), \\ v_{yy} = a_2(x,y)u_y + b_2(x,y)u + c_2(x,y)v + f_2(x,y). \end{cases} \tag{1}$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области G плоскости (x, y) выполняются включения $a_i \in C^2$, $b_i, c_i, f_i \in C^1$, $i = \overline{1,2}$. Решение системы (1) класса $u, v \in C^1(G)$, $u_{xx}, v_{yy} \in C(G)$ назовем *регулярным в* G.

Задача D**:** найти в области $D_0\colon\ 0 < y < x < T$ регулярное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$
\begin{array}{ll}
u(y,y) = \varphi_1(y), & (u_x - a_1 v)(y,y) = \varphi_2(y), \\
v(x,0) = \psi_1(x), & (v_y - a_2 u)(x,0) = \psi_2(x),
\end{array}
$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi_1(x), \psi_2(x) \in C^1([0,T])$.

Методом интегральных уравнений доказаны существование и единственность решения задачи D, предложен способ определения матрицы Римана–Адамара задачи D (которая играет здесь ту же роль, что и матрица Римана–Адамара при решении задачи Дарбу [9]), опирающийся на определение матрицы Римана [4–6]. Построено решение задачи D в терминах предложенной матрицы Римана–Адамара.

Литература

1. Бицадзе А. В. *О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными* // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. № 6. С. 22–31.
2. Чекмарев Т. В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614–1622.
3. Плещинская И. Е. *Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными* // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1634–1637.
4. Миронова Л. Б. *О методе Римана в* $\mathbb{R}^n$ *для одной системы с кратными характеристиками* // Известия вузов. Математика. 2006. № 1. С. 34–39.
5. Миронова Л. Б. *О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными* // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. № 43. С. 31–37.
6. Жегалов В. И., Миронова Л. Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными* // Известия вузов. Математика. 2007. № 3. С. 12–21.
7. Созонтова Е. А. *О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа* // Известия вузов. Математика. 2013. № 10. С. 43–54.
8. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. *Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка* n *с некратными характеристиками* // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 4. С. 752–759.
9. Mironova L. B. *Boundary-value Problems with Data on Characteristics for Hyperbolic Systems of Equations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. № 3. P. 400–406.

ЛОКАЛЬНОЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА

А.И. Никитин, Д.А. Булыно

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана:

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u - c_1(x,t)v^p, \quad v_t = \Delta v - c_2(x,t)u^q, & x \in \Omega, \quad t > 0,\\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} \phi(x,y,t)u^m(y,t)\,dy, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0,\\
\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} \psi(x,y,t)v^n(y,t)\,dy, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0,\\
u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega,
\end{cases}
\tag{1}
$$

где $p,\ q,\ m,\ n$ – положительные постоянные, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, ν – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1) будем предполагать следующее:

$$c_i(x,t) \in C^{\alpha}_{loc}\big(\bar\Omega \times [0,+\infty)\big), \quad 0 < \alpha < 1, \quad c_i(x,t) \geqslant 0, \quad i = 1,2;$$

$$\phi(x,y,t) \in C\big(\partial\Omega \times \bar\Omega \times [0,+\infty)\big), \quad \phi(x,y,t) \geqslant 0;$$

$$\psi(x,y,t) \in C\big(\partial\Omega \times \bar\Omega \times [0,+\infty)\big), \quad \psi(x,y,t) \geqslant 0;$$

$$u_0(x), v_0(x) \in C^1(\bar\Omega), \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad v_0(x) \geqslant 0 \text{ в } \Omega;$$

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} \phi(x,y,0)u_0^m(y)\,dy, \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} \psi(x,y,0)v_0^n(y)\,dy \ \text{ на } \partial\Omega.$$

Пусть $Q_T = \Omega\times(0,T)$. Для данной задачи было доказано локальное существование решения.

Теорема. *Для малых значений T задача (1) имеет единственное решение в Q_T.*

Литература

1. Gladkov A., Guedda M. *Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition* // Applicable Analysis. 2012. V. 91. № 12. P. 2267-2276.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ж.А. Отарова, А.Б. Бекиев

В работе рассматривается обратная задача для уравнения четвертого порядка смешанного типа с нелокальными условиями.

В области $\Omega = \big\{(x,t) : 0 < x < 1, \ -\alpha < t < \beta\big\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xxxx}\,(x,t) - \operatorname{sgn} t\, u_{tt}\,(x,t) = f\,(x).$$

Задача 1. Найти в области Ω функции $u\,(x,t), f\,(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$u\,(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\left(\bar\Omega\right) \cap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega_+ \cup \Omega_-\right),$$

$$Lu\,(x,t) \equiv f\,(x)\,, \ (x,t) \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

$$u\,(0,t) = 0, \ \ u_x\,(0,t) = u_x\,(1,t)\,, \ \ u_{xx}\,(1,t) = 0, \ \ u_{xxx}\,(0,t) = u_{xxx}\,(1,t)\,, \ \ -\alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

$$u\,(x,\,\beta) = \varphi\,(x)\,, \ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u\,(x,\,-\alpha) = \eta\,(x)\,, \, u_t\,(x,-\alpha) = \xi\,(x)\,, \ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $\Omega_+ = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{t < 0\}$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\eta(x)$, $\xi(x)$ – заданные гладкие функции.

Такие нелокальные обратные задачи для уравнений второго порядка исследованы в работах К.Б. Сабитова [1–4], Н.В. Мартемьянова [1], С.Н. Сидорова [5].

Система функций

$$X_0(x) = 2x,\ \ X_n^{(1)}(x) = 2\sin\lambda_n x,\ \ X_n^{(2)}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} - e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \cos\lambda_n x \tag{1}$$

и биортогональная с ней система функций

$$Y_0(x) = 1,\ \ Y_n^{(1)}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} + e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \sin\lambda_n x,\ \ Y_n^{(2)}(x) = 2\cos\lambda_n x,\quad \lambda_n = 2\pi n,\quad n = 1, 2, ...,$$

образуют базис Рисса в $L_2(0,\, 1)$ [6].

Имеет место следующая

Теорема. *Если функции* $\varphi(x)$, $\eta(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$\varphi(x),\ \eta(x) \in C^{(5)}[0,\, 1],\ \varphi(0) = \eta(0) = 0,\ \varphi'(0) = \varphi'(1),\ \eta'(0) = \eta'(1),$$

$$\varphi''(1) = 0,\ \eta''(1) = 0,\ \varphi'''(0) = \varphi'''(1),\ \eta'''(0) = \eta'''(1),\ \varphi^{(4)}(0) = \eta^{(4)}(0) = 0,$$

$$\xi(x),\ \psi(x) \in C^{(3)}[0,\, 1],\ \xi(0) = \psi(0) = 0,\ \xi'(0) = \xi'(1),$$

$$\psi'(0) = \psi'(1),\ \xi''(1) = 0,\ \psi''(1) = 0$$

и для любого $n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\left(1 - \cos\lambda_n^2\beta\right)\operatorname{sh}\lambda_n^2\alpha + \left(\operatorname{ch}\lambda_n^2\alpha - 1\right)\sin\lambda_n^2\beta \neq 0,$$

то существует единственное регулярное решение задачи 1.

Доказательство теоремы устанавливается с помощью разложения в ряд (1) решения $u(x,t)$.

Литература

1. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. *Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием* // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 3. С. 633–647.

2. Сабитов К. Б., Сафин Э. М *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Математические заметки. 2010. Т. 87. № 6. С. 907-918.

3. Сабитов К. Б., Сафин Э. М *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Известия вузов. Математика. 2010. № 4. С. 55–62.

4. Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.* М: Наука. 2016.

5. Сидоров С. Н. *Прямые и обратные задачи для вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальными условиями*: автореф. канд. дис. . . . Казань, 2015.

6. Кадиркулов Б. Ж. *Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка* // Узбекский математический журнал. 2012. № 1. С. 74–80.

О НЕУСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЯХ РАВНОВЕСИЯ 2–D МОДЕЛИ БРОУДВЕЛЛА

Е.В. Радкевич, О.А. Васильева, П.А. Захарченко

Кинетическая теория рассматривает газ как совокупность громадного числа хаотически движущихся частиц тем или иным образом взаимодействующих между собой [2, 3]. В результате таких взаимодействий частицы обмениваются импульсами, энергией. Взаимодействие может осуществляться путем прямого столкновения частиц или при помощи тех или иных сил. Для пояснения математической схемы, описывающей подобные явления, в [2] рассматриваются так называемые дискретные модели кинетического уравнения Больцмана и приводится феноменологический вывод уравнения Больцмана для газовой модели с конечным числом различных скоростей частиц и конечным числом разных взаимодействий (модели типа Броудвелла [1]).

Двумерная модель Броудвелла

$$\partial_t n_1 + c\partial_x n_1 = \frac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2),$$

$$\partial_t n_2 - c\partial_x n_2 = \frac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2),$$

$$\partial_t n_3 + c\partial_y n_3 = \frac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4),$$

$$\partial_t n_4 - c\partial_y n_4 = \frac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4)$$

(см. так же [9]) относится к классу неинтегрируемых уравнений. Система (1) является кинетическим уравнением Больцмана модельного двумерного газа [1] частиц движущихся на двумерной плоскости, скорости которых $\big((c,0),\ (-c,0),\ (0,c),\ (0,-c)\big)$ будем предполагать направленными вдоль координатных осей. Здесь $n_1(x,y,t)$, $n_2(x,y,t)$, $n_3(x,y,t)$, $n_4(x,y,t)$ – плотность(число частиц на единицу площади) частиц соответствующих четырех групп. Все частицы распределены по четырем группам со скоростями $(c,0)$, $(-c,0)$, $(0,c)$, $(0,-c)$, обмениваются скоростями – $I+II = II+I$, переходя в частицы третьей и четвертой групп $(I + II = III + IV)$. Аналогично $III + IV = IV + III$ или $III + IV = I + II$, $I + III = III + I$, $I + IV = IV + I$, $II + III = III + II$, $II + IV = IV + II$. Изменение числа частиц в группах может происходить только в результате реакций:

$$I + II = III + IV, \quad III + IV = I + II.$$

Как показано в [2], $n_i > 0$, $i = 1,\dots,4$, если начальные условия $n_i^0 > 0$, $i = 1,\dots,4$. Здесь выполнены уравнение неразрывности и уравнения сохранения импульса.

Эта система обнаруживает нерегулярное поведение решений(численным экспериментом устанавливает неустойчивость стационарных решений в линейном приближении при некоторых значениях внутренних параметров). Наша задача – установить это аналитически.

Мы рассмотрим малые периодические возмущения состояния равновесия

$$n_1 = n_1^e + \varepsilon^2\sqrt{n_1^e}\,u, \quad n_2 = n_2^e + \varepsilon^2\sqrt{n_2^e}\,v, \quad n_3 = n_3^e + \varepsilon^2\sqrt{n_3^e}\,w, \quad n_4 = n_4^e + \varepsilon^2\sqrt{n_4^e}\,z.$$

Докажем, что положительные состояния равновесия $(n_1^e, n_2^e, n_3^e, n_4^e)$, $n_j^e > 0$, $n_1^e n_2^e = n_3^e n_4^e$ при условии $n_3^e > n_1^e$, $n_4^e > n_1^e$ являются седлами. Устойчивое многообразие определяется соотношениями «креста»

$$u^0_{k,-k} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} z^0_{k,-k} = v^0_{k,k} + \frac{z_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} z^0_{k,k} = 0$$

на коэффициенты Фурье начального возмущения (u_0, v_0, w_0, z_0). При достаточно гладких начальных данных стабилизация вдоль устойчивого многообразия – экспоненциальная, т.е. существует $\gamma = O(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sup_Q \big(|u| + |v| + |w| + |z|\big)(t) \leqslant Ce^{-\gamma t},$$

где Q – ячейка периодичности.

Литература

1. Broadwell T. E. *Study of rarified shear flow by the discrete velocity method* // J. of Fluid Mechanics. 1964. V. 19:3.

2. Годунов С. К., Султангазин У. М. *О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана* // Успехи математических наук. 1974. Т. XXVI. В. 3(159). С. 3–51.

3. Boltzmann L. *On the Maxwell method to the reduction of hydrodynamic equations from the kinetic gas theory* // Rep. Brit. Assoc. in the L. Boltzmann memories. 1984. V. 2. P. 307-321.

4. Radkevich E. V. *Mathematical Aspects of Nonequilibrium Processes*| / Novosibirsk: Tamara Rozhkovskaya Publisher, 2007.

5. Ильин О. В. *Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. В. 47. № 12. С. 2076–2087.

6. Радкевич Е.В. *О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 47. С. 108–139.

7. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A. *Local equilibrium of the Carleman equaiton* // Journal of Mathematical Sciences. 2015. V. 207. № 2.

8. Радкевич Е. В., Васильева О. А., Духновский С. А. *О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова–Султангазина* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 60. С. 1–58.

9. Рабинович М. И. *Стохастические автоколебания и турбулентность* // Успехи физических наук. 1978. Т. 125. № 1. С. 123–168.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

М.Х. Рузиев, Г.Б. Рахимова

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\gamma}_{0+,y} u = 0, \ \ 0 < \gamma < 1, \quad y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\alpha_0}{(-y)^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \dfrac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\gamma}_{0+,y}$ – частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка γ $(0 < \gamma < 1)$ от функции $u(x, y)$ по второй переменной [1, с. 34] в области D, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости $D^+ = \big\{(x, y)\colon -\infty < x < \infty,\ y > 0\big\}$

и области D^-, лежащей в нижней полуплоскости $(y < 0)$ и ограниченной характеристиками
$$OC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$
и отрезком [0,1] прямой $y = 0$. В (1) m, α_0, β_0 – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям
$$m > 0, \quad |\alpha_0| < \frac{m+2}{2}, \quad 1 < \beta_0 < \frac{m+4}{2}.$$

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$, которая:
1) $u(x,y)$ стремится к нулю при $(x^2+y^2) \to \infty$;
2) удовлетворяет краевым условиям
$$y^{1-\gamma}u|_{y=0} = 0, (-\infty < x \leqslant 0,\ 1 \leqslant x < \infty),$$
$$u|_{OC} = \psi(x),\ \ x \in [0, 1/2],$$
а также условиям сопряжения
$$\lim_{y\to+0} y^{1-\gamma}u(x,y) = \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0-1}u(x,y),\ \ x \in \bar{I} = [0,1],$$
$$\lim_{y\to+0} y^{1-\gamma}\big(y^{1-\gamma}u(x,y)\big)_y = \lim_{y\to-0}(-y)^{2-\beta_0}\big((-y)^{\beta_0-1}u(x,y)\big)_y,\ x \in I = (0,1),$$
где $\psi(x)$ – заданная функция, $\psi(0) = 0$.

Будем искать решение $u(x,y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D таких, что
$$y^{1-\gamma}u \in C(\bar{D^+}), \quad u(x,y) \in C\big(\bar{D^-} \setminus \overline{OB}\big),$$
$$y^{1-\gamma}(y^{1-\gamma}u)_y \in C\Big(D^+ \cup \big\{(x,y) :\ 0 < x < 1,\ y = 0\big\}\Big),$$
$$u_{xx} \in C(D^+ \cup D^-), \quad u_{yy} \in C(D^-).$$

Доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи.

Отметим, что краевые задачи для уравнения (1) в случае когда $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$ исследованы в работах [2, 3]. Краевая задача со смещением для уравнения (1) при $-m/2 < \beta_0 < 1$ в области D изучена в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Ф-ФА-2021-424 Министерства инновационного развития Республики Узбекистан.

Литература

1. Самко С. Г., Килбасс А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск.: Наука и техника, 1987.

2. Килбасс А. А., Репин О. А. *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной* // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 638–644.

3. Геккиева С. Х. *Об одном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной* // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2001. Т. 5. № 2. С. 18–22.

4. Ruziev M. Kh. *A boundary value problem for partial differential equation with fractional derivative* // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2021. Т. 24. № 2. С. 509–517.

ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ НА ПОЛУПРЯМОЙ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ГРАНИЦЕ

К.А. Спесивцева, Ф.Е. Ломовцев

Найдены решение и условия корректности смешанной задачи:

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)\,u_{xt}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in\dot{G}_\infty=(0,+\infty)\times(0,+\infty),\tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x),\;\; u_t(x,t)|_{t=0}=\psi(x),\;\; x>0,\tag{2}$$

$$\big[\zeta(t)u_{tt}+\xi(t)u_{xt}+\theta(t)u_{xx}+\alpha(t)u_t+\beta(t)u_x+\gamma(t)u\big]|_{x=0}=\mu(t),\quad t>0,\tag{3}$$

где $a_1>0,\ a_2>0,\ b_1,\ b_2\in\mathbb{R},\ \ f,\ \varphi,\ \psi,\ \mu$ – заданные функции. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых вещественных функций на подмножестве $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Первая четверть плоскости $G_\infty=[0,\infty[\times[0,\infty[$ делится критической характеристикой $x=a_1t$ на два множества $G_-=\{(x,t)\in G_\infty : x>a_1t,\, t>0\}$ и $G_+=\{(x,t)\in G_\infty : x\leqslant a_1t,\ x\geqslant 0\}$.

Определение 1. Функция $u\in C^n(G_\infty),\ G_\infty=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, называется *гладким* решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет (1) на $\dot{G}_\infty$ в обычном смысле, а (2) и (3) – в смысле пределов от $u(\dot{x},\dot{t})$ в точках $(\dot{x},\dot{t})\in\dot{G}_\infty$ при $\dot{x}\to x,\ \dot{t}\to t$ для граничных точек (x,t).

В [1] выведена критериальность условий согласования (3) с (2) и (1) для задачи (1)–(3):

$$Y_{k+1}\equiv\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!\,(k-i)!}\Big\{S_{i,k}+\alpha^{(k-i)}(0)A_i+\beta^{(k-i)}(0)B_i+$$
$$+\Big[\eta_i\alpha^{(k-i)}(0)+\eta_{i-1}\beta^{(k-i)}(0)\Big]\varphi^{(i+1)}(0)+\Big[\rho_i\alpha^{(k-i)}(0)+\rho_{i-1}\beta^{(k-i)}(0)\Big]\psi^{(i)}(0)+$$
$$+\gamma^{(k-i)}(0)\Big[D_i+\eta_{i-1}\varphi^{(i)}(0)+\rho_{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\Big]\Big\}=\mu^{(k)}(0),\tag{4}$$

$$S_{i,\,k}=\zeta^{(k-i)}(0)\Big\{f^{(0,i)}(0,0)+(a_2-a_1)Z_i+$$
$$+(a_2-a_1)a_2^i[a_1\varphi^{(i+2)}(0)+\psi^{(i+1)}(0)]\Big\}+\xi^{(k-i)}(0)\Big\{\Xi_i+a_2^i\Big[a_1\varphi^{(i+2)}(0)+\psi^{(i+1)}(0)\Big]\Big\},$$

$$i\in[0,k]\,,\;\; k\in[0,n-1]\,,\;\; n\geqslant 2,\;\; f^{(i,j)}=\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial t^j},$$

где

$$A_i=\sum_{s=1}^{i}\rho_{s-1}f^{(s-1,i-s)}(0,0),\ i\geqslant 1,\ \ A_0=0;\qquad B_i=\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s,i-s-1)}(0,0),\ B_0=B_1=0,$$

$$D_i=\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s-1,i-s-1)}(0,0),\ i\geqslant 2,\ D_0=D_1=0;$$

$$Z_i=\sum_{s=1}^{i}a_2^{s-1}f^{(s,i-s)}(0,0),\ i\geqslant 1,\ Z_0=0;\qquad \Xi_i=\sum_{s=1}^{i}a_2^{s-1}f^{(s,i-s)}(0,0),\ i\geqslant 1,\ \Xi_0=0;$$

$$\rho_j = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{2j-k} a_1^k a_2^{n-k}, \quad \eta_j = a_1 a_2 \sum_{k=1}^{j} (-1)^{2j-k} a_1^k a_2^{n-k-1}.$$

Сумма $S_{n-1,n-1}$ из (4) содержит частные производные порядка $n-1$ от $f \in C^{n-1}(G_\infty)$:

$$K_n(x) \equiv \Big\{(a_2 - a_1)\zeta(0) + \xi(0)\Big\} \left(\sum_{s=1}^{n-1} a_2^{s-1} f^{(s,n-s-1)}(x,0) \right) + \zeta(0) f^{(0,n-1)}(x,0). \tag{5}$$

Определение 2. Числа $K_n(0)$ из (5) при $f(x,t) = f_0(x,t)$ и $x = 0$ называются *критериальными значениями* производных от f порядка $n-1$ в (4) при $q = n$ и целых $n \geqslant 2$ для пределов $f_0(x,t) = \lim_{m\to\infty} f_m(x,t)$ функций $f_m(x,t) \in C^n(G_\infty)$ по норме соответствующего банахова пространства функций $f_0(x,t) \in C^{n-2}(G_\infty)$, удовлетворяющих (7), (8) и

$$\theta(t)\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{a_1 - a_2}{a_1}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)d\tau\right] - f(0,t) \right\} +$$

$$+a_2\xi(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)d\tau\right] \in C^{n-2}(\mathbb{R}_+). \tag{6}$$

Используем частные классические решения неоднородного уравнения (1) на $\dot{G}_\infty$ из [2]:

$$F_i(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[\int_0^{t_i(x)} \int_{x_i(t,\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau + \int_{t_i(x)}^{t} \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right], \; t_i(x) = (-1)^i\left(t - \frac{x}{a_1}\right),$$

где $x_i(t,\tau) = \Big[1 - (-1)^i\left((a_2/a_1) + 1\right)\Big](x - a_1 t) - a_2\tau$, $i = 1,2$. Кроме того, введем обозначения

$$\Gamma(t) = \left[\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u\right]\big|_{x=0},$$

$$L(y) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi(y) + a_2\varphi(0) + \int_0^y \psi(s)ds\right], \quad M(t) = \Gamma(t)\left[L(x+a_2t) + F_2(x,t)\right].$$

Теорема. *Пусть в (3) коэффициенты* $\zeta,\ \xi,\ \theta,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in C^{m-1}(\mathbb{R}_+)$, *нехарактеристические первые косые производные, т.е.* $a_1\alpha(t) \neq \beta(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, *и характеристические вторые частные производные [2], т.е.* $a_1^2\zeta(t) - a_1\xi(t) + \theta(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. *Тогда задача (1)–(3) на* $\dot{G}_\infty$ *имеет единственное и устойчивое по* $\varphi,\ \psi,\ \mu,\ f$ *гладкое решение* $u \in C^n(G_\infty)$, $n \geqslant 2$, *для тех и только тех* $\varphi,\ \psi,\ \mu,\ f$, *для которых* $\varphi, \mu \in C^n(\mathbb{R}_+)$, $\psi \in C^{n-1}(\mathbb{R}_+)$, $f \in C^{n-2}(G_\infty)$,

$$\int_0^t f(x + a_2(t-\tau),\tau)d\tau \in C^{n-1}(G_\infty), \tag{7}$$

$$\bigl[1-(-1)^i(a_2/a_1+1)\bigr]\int\limits_0^{t_i(x)} f\bigl(x_i(t,\tau),\tau\bigr)\,d\tau+\int\limits_{t_i(x)}^{t} f\bigl(x-a_1(t-\tau),\tau\bigr)\,d\tau\in C^{n-1}(G_\infty),\ \ i=1,2,\quad (8)$$

$$\bigl[(a_2-a_1)\zeta(t)+\xi(t)\bigr]\varphi^{(n+1)}(a_2t),\ \bigl[(a_2-a_1)\zeta(t)+\xi(t)\bigr]\psi^{(n)}(a_2t)\in C(\mathbb{R}_+),$$

и верны условия согласования (4) при $n\geqslant 2$ с критериальными значениями $K_n(0)$ суммы старших производных порядка $n-1$ от $f\in C^{n-2}(G_\infty)$, удовлетворяющей требованиям гладкости (6)–(8). Гладким решением $u\in C^n(G_\infty)$ задачи (1)–(3) на $\dot G_\infty$ служит функция:

$$u_-(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi(x+a_2t)+a_2\varphi(x-a_1t)+\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t}\psi(s)ds+\int\limits_0^t\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right],\ (x,t)\in G_-,$$

$$u_+(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi(x+a_2t)+a_2\varphi(0)+\int\limits_0^{x+a_2t}\psi(s)\,ds\right]+$$

$$+\,a_1\int\limits_0^{t_2(x)} e^{a_1\int\limits_{t_2(x)}^{\rho}\frac{\gamma(\nu)}{a_1\alpha(\nu)-\beta(\nu)}d\nu}\,\frac{\mu(\rho)-M(\rho)}{a_1\alpha(\rho)-\beta(\rho)}\,d\rho+F_2(x,t),\quad (x,t)\in G_+.$$

Эта работа ведётся в рамках проекта НИР 1.2.02.3 ГПНИ «Конвергенция-2025».

Литература

1. Ломовцев Ф. Е., Спесивцева К. А. *Согласование характеристических производных граничного режима с начальными условиями и одномерным волновым уравнением* // Веснiк МДУ iм. А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаýчыя навукi (матэматыка, фiзiка, бiялогiя). 2021. № 1(57). С. 53–62.

2. Ломовцев Ф. Е. *Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38—52.

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.И. Усков, А.Г. Пантелеева

Рассматривается задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial t}+cu(x,t)+f(x,t),\tag{1}$$

$$u(x,0)=g(x),\quad u(0,t)=h(t)\quad \bigl(g(0)=h(0)\bigr),\tag{2}$$

где $a,\ b,\ c$ – заданные постоянные, $f,\ g,\ h$ – заданные достаточно гладкие функции; $(x,t)\in\Pi=[0,x_k]\times[0,t_k]$.

Уравнениями в частных производных второго порядка описываются явления в квантовой экономике [1], процессы сорбции и десорбции газов, процессы сушки [2] и т.д.

Под *решением задачи (1), (2)* подразумевается функция $u(x,t)$, дифференцируемая по x при каждом $t \in [0, t_k]$, дифференцируемая по t при каждом $x \in [0, x_k]$, со всеми входящими в уравнение (1) непрерывными в Π частными производными и удовлетворяющая (1), (2) на Π.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *Если линейные операторы A, B коммутируют по умножению, то справедлив аналог бинома Ньютона*

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i A^{k-i} B^i, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$.

Лемма 1 доказывается методом математической индукции.

Предложение 1. *Для достаточное количество раз интегрируемой функции $f(x)$ справедлива формула:*

$$\int_0^x \int_0^{s_0} \ldots \int_0^{s_{k-2}} f(s_{k-1})\, ds_{k-1}\, ds_{k-2}, \ldots\, ds_0 = \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(s)\, ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Предложение 1 устанавливается с помощью метода интегрирования по частям несколько раз.

Начально-краевая задача для уравнения (1) с переменными коэффициентами изучена в работе [3]. Там она сводится равносильными заменами к задаче Коши для алгебро-дифференциального уравнения первого порядка с вырожденным операторным коэффициентом при производной и для ее решения используется метод декомпозиции. Применим полученные результаты в частном случае постоянных коэффициентов. Обозначим: I – единичный оператор,

$$d = ab + c, \quad T(x) = aI + d \int_0^x e^{b(x-s)}(\cdot)\, ds, \quad \Phi(x,t) = e^{bx}\big(h'(t) - ah(t)\big) + \int_0^x e^{b(x-s)} f(s,t)\, ds.$$

Предложение 2. *Операторная экспонента $e^{tT(x)}$ раскладывается в ряд*

$$e^{tT(x)} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} T^k(x),$$

где

$$T^k(x) = a^k I + \sum_{i=1}^{k} \int_0^x \frac{C_k^i a^{k-i} d^i}{(i-1)!} (x-s)^{i-1} e^{b(x-s)}(\cdot)\, ds.$$

Оно вытекает из леммы 1 и предложения 1 и применения ряда МакЛорена.

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна в Π, $h(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и имеет вид*

$$u(x,t) = e^{tT(x)} g(x) + \int_0^t e^{(t-r)T(x)} \Phi(x,r)\, dr.$$

Теорема выполняется, поскольку при сделанных допущениях T – ограниченный и сильно непрерывный оператор, Φ – непрерывная функция.

Проиллюстрируем теорему.

Пример 1. Рассмотрим задачу в Π для однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial t} + 5u(x,t), \tag{3}$$

$$u(x,0) = e^x, \quad u(0,t) = \cos t. \tag{4}$$

Выполняется условие согласования: $e^0 = \cos 0 = 1$. Запишем решение в виде частичной суммы первых пяти слагаемых ряда. Вычисления приводят к решению задачи (3), (4)

$$u(x,t) \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{t^k}{k!}\, g_k(x),$$

где

$$g_0(x) = g(x) = e^x, \quad g_1(x) = -\frac{7}{2}e^x + \frac{11}{2}e^{3x},$$

$$g_2(x) = \frac{49}{4}e^x - \frac{33}{4}e^{3x} + \frac{121}{2}xe^{3x}, \quad g_3(x) = -\frac{343}{8}e^x + \frac{407}{8}e^{3x} + \frac{121}{4}xe^{3x} + \frac{1331}{4}x^2e^{3x},$$

$$g_4(x) = \frac{2401}{16}e^x - \frac{2145}{16}e^{3x} + \frac{4961}{8}xe^{3x} + \frac{6655}{8}x^2e^{3x} + \frac{14641}{12}x^3e^{3x}.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу в Π для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + 2u(x,t) - 3e^{x+t}, \tag{5}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = \sin t. \tag{6}$$

Выполняется условие согласования: $0 = \sin 0 = 0$.

Так как $d = -1 \cdot 2 + 2 = 0$, то решение можно записать в виде элементарной функции. Вычисления приводят к решению задачи (5), (6)

$$u(x,t) = e^{2x}\sin t - 3(e^{2x} - e^x)\,\mathrm{sh}\, t.$$

Литература

1. Маслов В. П. *Квантовая экономика.* Режим доступа: http://viktor-maslov.narod.ru/Quanrum Economics.pdf. Дата доступа: 25.11.2021.

2. Тихонов А. Н., Забежинский Я. Л. *Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала* // Журнал физической химии. 1946. Т. 20. Вып. 10. С. 1113–1126.

3. Баев А. Д., Зубова С. П., Усков В. И. *Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции* // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика. 2013. № 2. С. 134–140.

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Е.В. Устилко, Ф.Е. Ломовцев

В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty$ решается смешанная задача

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t),\ (x,t)\in\dot{G}_\infty = (0,+\infty)\times(0,+\infty), \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ \ \partial_t u(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x>0, \quad (2)$$

$$[\alpha(t)\partial_t u(x,t) + \beta(t)\partial_x u(x,t) + \gamma(t)u(x,t)]|_{x=0} = \mu(t), \quad t>0, \quad (3)$$

где коэффициенты $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – заданные функции переменной t; $f,\ \varphi,\ \psi,\ \mu$ – заданные функции своих переменных $x,\ t$ и постоянные $a_1>0$, $a_2>0$, $b_1,\ b_2\in(-\infty,+\infty)$.

Множество $G_\infty = [0,+\infty)\times[0,+\infty)$ разбивается характеристикой $x=a_1t$ на два множества $G_- = \{(x,t)\in G_\infty : x > a_1t > 0\}$ и $G_+ = \{(x,t)\in G_\infty : 0\leqslant x\leqslant a_1t\}$.

Для задачи (1)–(3) выведены следующие условия согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) (в [1] для $m=2$, в [2] для $b_1=b_2=0$):

$$\Big\langle \alpha^{(q)}(0)[\psi(0)+a_1\varphi'(0)] +$$
$$+\varphi(0)\gamma^{(q)}(0)\Big\rangle + q\Big\{\alpha^{(q-1)}(0)\Big\langle a_2[-B(A\varphi(0)+\psi(0)) + A\varphi'(0)+\psi'(0)+$$
$$+a_1(B^2\varphi(0)-2B\varphi'(0)+\varphi''(0))] + f(0,0)\Big\rangle + \big(\gamma^{(q-1)}(0) - b_1\alpha^{(q-1)}(0)\big)\big(A\varphi(0)+\psi(0)\big)\Big\} +$$
$$+\sum_{i=2}^{q} C_q^i\Big\{\alpha^{(q-i)}(0)\Big\langle a_2^i\Big[\sum_{s=0}^{i} C_i^s(-B)^{i-s}\Big(\Big(A - \frac{(i+1)\,a_1B}{i-s+1}\Big)\varphi^{(s)}(0) + \psi^{(s)}(0)\Big) + a_1\varphi^{(i+1)}(0)\Big] +$$
$$+\sum_{j=0}^{i-1} a_2^j \sum_{p=0}^{j}\sum_{s=0}^{i-j-1} C_j^p C_{i-j-1}^s A^{i-j-s-1}(-B)^{j-p} f^{(p,s)}(0,0)\Big\rangle + (\gamma^{(q-i)}(0) - b_1\alpha^{(q-i)}(0))\times$$
$$\times\Big\langle a_2\frac{a_2^{i-1}-(-a_1)^{i-1}}{a_1+a_2}\Big[\sum_{s=0}^{i-1} C_{i-1}^s(-B)^{i-s-1}\Big(\Big(A - \frac{i\,a_1B}{i-s}\Big)\varphi^{(s)}(0) + \psi^{(s)}(0)\Big) + a_1\varphi^{(i)}(0)\Big] +$$
$$+\sum_{k=0}^{i-2}\frac{a_2^{k+1}-(-a_1)^{k+1}}{a_1+a_2}\sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{i-k-2} C_k^p C_{i-k-2}^s A^{i-k-s-2}(-B)^{k-p} f^{(p,s)}(0,0) +$$
$$+(-a_1)^{i-1}\sum_{s=0}^{i-1} C_{i-1}^s(-B)^{i-s-1}\big(A\varphi^{(s)}(0)+\psi^{(s)}(0)\big)\Big\rangle\Big\} = \sum_{i=0}^{q} C_q^i A^{q-i}\mu^{(i)}(0),\ \ q=0,1,\dots,m, \quad (4)$$

где $A=(a_1b_2+a_2b_1)/(a_1+a_2)$, $B=(b_2-b_1)/(a_1+a_2)$, $f^{(n,m)}(x,t) = \partial^{n+m}f(x,t)/\partial x^n\partial t^m$.

Рассмотрим сумму, которая присутствует в (4) при $q=m$

$$K_m(x) = \alpha(0)\sum_{j=0}^{m-1} a_2^j\Big\{\sum_{p=0}^{j}\sum_{s=0}^{i-j-1} C_j^p C_{i-j-1}^s A^{i-j-s-1}(-B)^{j-p} f^{(p,s)}(x,t)\Big\}\Big|_{t=0}, \quad m\geqslant 2. \quad (5)$$

Определение 1. Числа $K_m(0)$ из (5) при $f(x,t)=f_0(x,t)$ и $x=0$ называются *критериальными значениями* производных от f порядка $m-1$ в (4) при $q=m$ и целых $m\geqslant 2$ для пределов $f_0(x,t)=\lim_{n\to\infty} f_n(x,t)$ функций $f_n(x,t)\in C^m(G_\infty)$ по норме соответствующего банахова пространства функций $f_0(x,t)\in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющих (7), (8) и

$$\alpha(t)\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\int\limits_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)d\tau\right)\in C(\mathbb{R}_+). \tag{6}$$

Теорема. *Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты* α, β, $\gamma\in C^m(\mathbb{R}_+)$ *и характеристическая первая косая производная, т.е.* $a_1\alpha(t)=\beta(t)$, $\gamma(t)\neq b_1\alpha(t)$, $t\in\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$. *Для того, чтобы смешанная задача (1)–(3) на* $\dot G_\infty$ *имела единственное и устойчивое по* φ, ψ, f, μ *гладкое решение* $u\in C^m(G_\infty)$ *необходимо и достаточно требований гладкости (6),*

$$\varphi\in C^m(\mathbb{R}_+),\ \psi\in C^{m-1}(\mathbb{R}_+),\ f\in C^{m-2}(G_\infty),\ \mu\in C^m(\mathbb{R}_+).$$

$$\alpha\,(t)\,\varphi^{(m+1)}(a_2t)\,,\ \alpha\,(t)\,\psi^{(m)}(a_2t)\in C(\mathbb{R}_+),\ \int\limits_0^t f\big(x+a_2(t-\tau),\tau\big)\,d\tau\in C^{m-1}(G_\infty), \tag{7}$$

$$\big[1-(-1)^i(a_2/a_1+1)\big]\int\limits_0^{t_i(x)} f\big(x_i(t,\tau),\tau\big)\,d\tau+\int\limits_{t_i(x)}^t f\big(x-a_1(t-\tau),\tau\big)\,d\tau\in C^{m-1}(G_\infty),\ \ i=1,2, \tag{8}$$

должны выполняться условия согласования (4) с критериальными значениями $K_m(0)$. *Гладким решением* $u\in C^m(G_\infty)$ *характеристической задачи (1)–(3) на* $\dot G_\infty$ *является функция:*

$$u(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\Bigg\{a_1e^{-b_2t}\varphi(x+a_2t)+a_2e^{-b_1t}\varphi(x-a_1t)+$$

$$+\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t} e^{B(x-s)-A\,t}[A\varphi(s)+\psi(s)]\,ds+e^{Bx-At}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\Bigg\},\ \ (x,t)\in G_-,$$

$$u(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\Bigg\{a_1e^{-b_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)}\Big[e^{-b_2x/a_1}\varphi(x+a_2t)-e^{-b_1x/a_1}\varphi\Big(a_2\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)\Big)\Big]+$$

$$+\int\limits_{a_2t_2(x)}^{x+a_2t} e^{B(x-s)-A\,t}\,[A\varphi(s)+\psi(s)]\ ds\Bigg\}+\frac{e^{-b_1x/a_1}}{\gamma(t-x/a_1)-b_1\alpha(t-x/a_1)}\times$$

$$\times\Bigg\{\mu(t-x/a_1)-e^{-b_2(t-x/a_1)}\alpha(t-x/a_1)\Big[a_1\varphi'\Big(a_2(t-x/a_1)\Big)+b_1\varphi\Big(a_2(t-x/a_1)\Big)+$$

$$+\psi\Big(a_2(t-x/a_1)\Big)+\int\limits_0^{t_0(x)} e^{b_2\tau}f(x_2(t,\tau),\tau)\,d\tau\Big]\Bigg\}+$$

$$+\frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2}\left\{\int\limits_0^{t_2(x)}\int\limits_{x_2(t,\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau+\int\limits_{t_2(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\right\},\ (x,t)\in G_+.$$

$$t_i(x)=(-1)^i\left[t-(x/a_1)\right], x_i(t,\tau)=\Big[1-(-1)^i\left((a_2/a_1)+1\right)\Big](x-a_1t)-a_2\tau.$$

Эта работа ведётся в рамках проекта НИР 1.2.02.3 ГПНИ "Конвергенция-2025".

Литература

1. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. *Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии* // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2018. № 4(101). С. 18–28.

2. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. *Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 1. С. 30–37.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА ПСЕВДОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ

А.Р. Хашимов

Пусть $x\in D\subset R_x^n$, $y\in\Omega\subset R_y^m=\{y:y_1>0\}$, $0<t<T$, $Q=D\times\Omega\times(0,T)$. D – ограниченная, а Ω – неограниченная область, с гладкими границами Γ_1 и Σ соответственно.

В неограниченной области рассмотрим уравнение

$$L_0lu+L_1u+Mu=f(x,y,t), \tag{1}$$

где

$$lu=u_t+\alpha^k(x,y,t)u_{x_k},\ \ L_1u=b^{ij}(x,y,t)u_{x_ix_j}+b^i(x,y,t)u_{x_i},$$

$$L_0u=u_t-a^{ij}(x,y,t)u_{x_ix_j}+a^i(x,y,t)u_{x_i}+a(x,y,t)u,$$

$$L_1u=c^{pq}(x,y,t)u_{x_px_q}+b^p(x,y,t)u_{x_p}+c(x,y,t)u.$$

Предположим, что коэффициенты этих операторов удовлетворяют условиям

$$a^{ij}=a^{ji},\ \lambda_0|\xi|^2\leqslant a^{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\lambda_1|\xi|^2,\quad (x,y,t)\in Q\cup\partial Q,\quad \xi\in\mathbb{R}^{n+m+1},$$

$$c^{pq}=c^{pq},\ \gamma_0|\xi|^2\leqslant c^{pq}\xi_p\xi_q\leqslant\gamma_1|\xi|^2,\quad (x,y,t)\in Q\cup\partial Q,\quad \xi\in\mathbb{R}^{n+m+1}.$$

Пусть $G=D\times\Omega$. Будем предполагать, что в некоторой окрестности любой своей точки гиперповерхность ∂G представима в виде

$$x_j=\chi(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n),\ y_k=\chi_1(y_1,...,y_{k-1},y_{k+1},...,y_m)$$

при каких-либо j, k, где χ и χ_1 являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями.

Рассмотрим уравнение (1) с краевым условием

$$u|_{\partial Q}=0,\quad \alpha^ku_{x_k}|_{\sigma_2}=0. \tag{2}$$

Здесь $\sigma_2 = \{(x,y,t) \in \partial G \times (0,T) : \alpha^k \nu_k < 0\}$, ν_k – вектор внутренней нормали к ∂G в точке (x,y).

Отметим, что для обобщенного решения задачи (1), (2) нами были установлены энергетические оценки типа принципа Сен-Венана, с помощью которых можно исследовать асимптотические свойства решений задачи в бесконечно удаленной точке границы (см. [1]). Если область ограничена, то задача (1), (2) была исследована в работе [2]. Здесь мы установим энергетические оценки специального вида, с помощью которых можно доказать теорему о существовании решения задачи в неограниченной области.

Пусть $\{Q_\tau\}$ – семейство конечных подобластей области Q, зависящее от параметра $\tau \in \Pi = \{\tau : 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0\}$, $\tau_0 \leqslant \infty$. Будем предполагать, что S_τ – связная $(n+m)$-мерная поверхность, обладающая той же гладкостью, что и ∂Q, а ее граница – $\partial S_\tau \subset \partial Q$.

Положим

$$\Gamma_\tau = \partial G \cap \partial G_\tau, \quad \sigma_{0,\tau} = \{(x,y,t) \in \Gamma_\tau \times (0,T) : \alpha^k \nu_k = 0\},$$

$$\sigma_{1,\tau} = \big\{(x,y,t) \in \Gamma_\tau \times (0,T) : \alpha^k \nu_k > 0\big\}, \quad \sigma_{2,\tau} = \big\{(x,y,t) \in \Gamma_\tau \times (0,T) : \alpha^k \nu_k < 0\big\}.$$

Для некоторого $h > 0$ определим

$$\sigma_{1,h,\tau} = \Big\{(x,y,t) \in \sigma_{1,\tau} : \rho\big((x,y,t), \partial\sigma_{1,\tau}\big) > h\Big\}, \quad \sigma^h_{1,\tau} = \sigma_{1,\tau} \backslash \sigma_{1,h,\tau}.$$

Пусть $E(Q_\tau)$ есть множество функций $v \in C^2(Q_\tau)$ таких, что $v = 0$ на Γ и для некоторого числа $h > 0$ будет $l_0 = 0$ на $\sigma_{0,\tau} \cup \sigma^h_{1,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}$.

Пусть $H(Q_\tau)$ – гильбертово пространство, полученное пополнением $E(Q_\tau)$ по норме

$$\|u\|_{H(Q_\tau)} = \Bigg\{ \int\limits_{Q_\tau} (d_1^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u_{x_p} u_{x_q} + u_t^2 + u^2) dx - \int\limits_{\sigma_{2,\tau}} \alpha^k \nu_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \Bigg\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказана следующая теорема, с помощью которой можно построить обобщенное решение задачи (1), (2) в классах функций, растущих на бесконечности.

Теорема. *(Аналог принципа Сен-Венана). Пусть*

$$-1 \leqslant a^{ij}_{x_k} + a^i + a \leqslant 0, \quad \theta \equiv d - \frac{1}{2} d^{ij}_{x_i x_j} + \frac{1}{2} d^i_{x_i} - \frac{1}{2} c^{pq}_{y_p y_q} + \frac{1}{2} c^p_{y_p} - c < 0.$$

Если функция $u(x,y,t)$ является обобщенным решением задачи (1), (2) в области Q и $f(x,y,t)$ в G_{τ_0}. Тогда при любых $0 \leqslant R_0 \leqslant R$ имеет место оценка

$$\int\limits_{\Omega_{\tau(R_0)}} E(u) E(u)\, dx \leqslant \exp\left[-(R - R_0)\right] \int\limits_{\Omega_{\tau(R)}} E(u)\, dx.$$

Здесь

$$E(u) = d^{ij} u_{x_i x_j} + c^{pq} u_{y_p y_q} + u_t^2 - \theta u^2,$$

$$d^{ij} = d^{ji}, \quad \beta_0 |\xi|^2 \leqslant d^{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \beta_1 |\xi|^2, \quad (x,y,t) \in Q \cup \partial Q, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+m+1}.$$

Литература

1. Khashimov A.R., Smetanova D. *On the Uniqueness Classes of Solutions of Boundary Value Problems for Third-Order Equations of the Pseudo-Elliptic Type.* Axioms. 2020. 9.80.

2. Кожанов А.И. *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка.* Новосибирск, 1990.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Е.С. Чеб

В работе рассматривается корректно поставленная граничная задача для линейного уравнения в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами, содержащего младшие производные, в случае наличия у него одной кратной характеристики. Методом характеристик построено единственное классическое решение в явном виде при выполнении условий согласования начальных и граничных условий.

В полуполосе $Q = [0,\infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции

$$u : \overline{Q} = [0,\infty) \times \overline{\Omega} \ni (t,x) \to u(t,x),$$

где $\overline{\Omega}$ – замыкание области $\Omega = (0,l)$, рассмотрим гиперболическое уравнение четвертого порядка вида

$$\prod_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial}{\partial x} + b \right) u(t,x) = f(t,x), \quad a_i = a > 0,\ b > 0, \quad t > 0,\ x \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 0,1,2,3, \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Уравнение (1) имеет одну характеристику $x + at$ кратности четыре. В этом случае граничные условия для (1) задаются не на всей границе.

Добавим к уравнению (1) граничные условия вида

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|_{x=0} = \mu_s(t), \quad t > \frac{l}{a}, \quad s = 0,1, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|_{x=l} = \nu_s(t), \quad t > 0, \quad s = 0,1. \tag{4}$$

Обратим внимание, что условие (4) задается не на всей границе $x = 0$, а только на части. Выбор таких граничных условий гарантирует корректность по Адамару задачи (1) – (4) в классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций [1].

Заменой $u(t,x) = e^{-bt} v(t,x)$ задача (1)–(4) сводится к граничной задаче, рассмотренной в работе [2], но для неоднородного уравнения. В [2] предложен алгоритм вывода достаточных условий существования классического решения и условия согласования начальных и граничных функций.

Решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(t,x) = e^{-bt} \big(g_1(x+at) + t\, g_2(x+at) + t^2\, g_3(x+at) + t^3\, g_4(x+at) \big) + F_0(t,x), \tag{5}$$

где g_1, g_2, g_3 и g_4 – любые функции из $C^4(\mathbb{R})$ аргумента $x + at$, функции $g_i : [0,\infty) \to g_i(y) \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $F_0(t,x)$ – частное решение уравнения (1),

$$F_0(t,x) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{6} e^{b\tau} f(\tau, x - a(t-\tau))\, d\tau.$$

Требуется определить общий вид функций g_i $(i = 1,2,3,4)$ в представлении (5) при условии, что будут выполняться начальные (2) и граничные (3), (4) условия.

Литература

1. Чеб Е. С. *Классическое решение смешанной задачи для линейного гиперболического уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками* // Вестник ГГУ. Сер. 2. 2017. Т. 7. № 3. С. 33–41.

2. Чеб Е. С. *О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой* // Прикладная математика & Физика. 2020. Т. 1. № 1. С. 11–18.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Шилинец

Для изучения дифференциальных уравнений используются разные методы. Одним из таких методов является метод функций, моногенных в смысле В. С. Федорова (F-моногенных) [1-9].

В данной работе с помощью F-моногенных дуальных функций исследуется краевая задача для следующей системы дифференциальных уравнений в формальных производных [10]:

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = g(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = h(x,y), \tag{1}$$

где g, h – заданные комплексные или действительные функции класса $C^1(D)$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy, \quad i^2 = -1.$$

Определение 1. *Дуальной функцией в области* D называется функция вида

$$F(z) = f(z) + \varepsilon\varphi(z), \quad z \in D, \quad \varepsilon^2 = 0,$$

где $f(z)$, $\varphi(z)$ — комплексные или действительные функции, заданные в области D.

Определение 2. Дуальная функция $F(z)$ называется *F-моногенной* (*моногенной в смысле В. С. Федорова*) [1] по дуальной функции $P(z) = p(z) + \varepsilon q(z)$ в области D, если найдется такая дуальная функция ψ, что во всех точках области D имеем $dF = \psi dP$.

Функция ψ иногда обозначается $\psi = F'[P]$ и называется *F-производной функции F по функции P*.

Легко убедиться в том, что решением системы дифференциальных уравнений в формальных производных вида

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

в области D являются следующие функции: $f = f(z)$ – произвольная аналитическая функция от z в области D, $\varphi = f'(z)\overline{z} + h(z)$ – так называемая *бианалитическая в области D функция* [11].

Естественный интерес вызывает изучение системы дифференциальных уравнений в формальных производных (1).

Введем сейчас дуальные функции

$$w = w(z) = f(x,y) + \varepsilon\varphi(x,y), \quad P = z + \varepsilon\overline{z}, \quad Q = \overline{z} \ (\varepsilon^2 = 0),$$

а также дуальный дифференциальный оператор $\dfrac{\partial w}{\partial Q} = \dfrac{\partial w}{\partial \overline{z}} - \varepsilon \dfrac{\partial w}{\partial z}$. Тогда систему (1) можно, очевидно, записать в виде

$$\frac{\partial w(z)}{\partial Q} = A(z), \tag{2}$$

где $h(z) = h(x,y)$, $g(z) = g(x,y)$, $A(z) = h(z) - \varepsilon g(z)$.

Исследуем следующую **краевую задачу:** найти решение $w = w(z) \in C^1(D)$ уравнения (2) (системы (1)), если известны значения этого решения на границе C области $D_C \subset D$.

Если применить метод, используемый в работе [12] для исследования систем дифференциальных уравнений в частных производных, то получим, что система (1) будет эквивалентной в любой области $D_C \subset D$ следующему интегральному уравнению:

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C w(z) \frac{dP}{P - P_0} - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{D_C} A(z) \frac{dxdy}{P - P_0}, \tag{3}$$

где C – граница области D_C,

$$P_0 = z_0 + \varepsilon \overline{z}_0, \quad z_0 \in D_C, \quad P = P(z) = z + \varepsilon \overline{z}, \quad A(z) = h(z) - \varepsilon g(z), \quad z \in C.$$

Полученное интегральное представление (3) и дает решение сформулированной краевой задачи.

Литература

1. Федоров В. С. *Основные свойства обобщённых моногенных функций* // Известия вузов. Математика. 1958. № 6. С. 257–265.

2. Павлов С. Д. *Решение систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными с помощью моногенных функций в смысле В.С. Федорова* // Anal. stiint. Univ. Iasi. 1962. T. 8. F. 2. P. 323–329.

3. Стельмашук Н. Т. *О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных* // Сибирский математический журнал. 1964. Т. 5. № 1. С. 166–173.

4. Кусковский Л. Н. *О краевой задаче типа Римана-Гильберта* // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 3. С. 52–532.

5. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. *Метод формальных производных для решения задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных* // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 11. С. 2019–2020.

6. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. *Решение краевой задачи для одной системы дифференциальных уравнений в формальных производных* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 127–128.

7. Stelmashuk N. T., Shylinets V. A. *The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators* // Труды Института математики НАН Беларуси. 2004. Т. 12. № 2. С. 170–171.

8. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. *О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2008. № 2. С. 61–65.

9. Шылiнец У. А., Гуло I. М. *Даследаванне сiстэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных пры дапамозе F-манагенных гiперкамплексных функцый* // Весцi БДПУ. Серыя 3. 2019. № 4. С. 5–8.

10. Гусев В. А. *Об одном обобщении ареолярных производных* // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara. 1962. T. 7. F. 2. P. 223–238.

11. Затуловская К. Д. *Полианалитические функции и функции, моногенные в смысле В. С. Фёдорова* // Смоленский матем. сборник. 1969. Т. 2. В. 20. С. 20–27.

12. Стельмашук Н. Т. *Интегральное представление решений одной системы уравнений в частных производных* // Смоленский матем. сборник. 1970. Т. 3. В. 23. С. 33–38.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE AIRY EQUATION ON LADDER TYPE METRIC GRAPH

M.I. Akhmedov, Z.A. Sobirov

We consider Airy type evolution equation on ladder type metric graph (fig. 1).

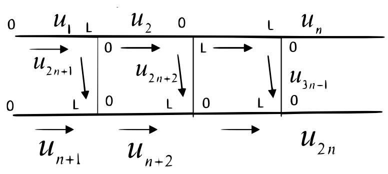


Fig. 1. Ladder type metric graph.

The bonds of the graph denoted by B_j, $j=\overline{1,3n-1}$, as it is show n in fig. 1.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}\right)u_j(x_j,t)=f_j(x,t), \quad t>0, \quad x_j\in B_j, \quad j=\overline{1,3n-1}. \tag{1}$$

$$b_k u_k(L,t)=a_{k+1}u_{k+1}(0,t)=a_{2n+k}u_{2n+k}(0,t),$$

$$u_1(0,t)=\phi_1(t), u_n(L,t)=\phi_2(t), \tag{2}$$

$$d_k u_k(L,t)=c_{k+1}u_{(k+1)x}(0,t)=c_{2n+k}u_{(2n+k)x}(0,t),$$

$$u_{1x}(0,t)=\delta_1(t), \tag{3}$$

$$\frac{1}{b_k}u_{kxx}(L,t)=\frac{1}{a_{k+1}}u_{(k+1)xx}(0,t)+\frac{1}{a_{2n+k}}u_{(2n+k)xx}(0,t), \tag{4}$$

$$b_{n+k}u_{n+k}(L,t)=a_{n+k+1}u_{n+k+1}(0,t)=a_{2n+k}u_{2n+k}(L,t),$$

$$u_{n+1}(0,t)=\phi_3(t), u_{2n}(L,t)=\phi_4(t), \tag{5}$$

$$c_{n+k+1}u_{(n+k+1)x}(0,t)=d_{2n+k}u_{(2n+k)x}(L,t)+d_{n+k+1}u_{(n+k+1)x}(L,t),$$

$$u_{(n+1)x}(0,t)=\delta_2(t), \tag{6}$$

$$\frac{1}{b_{n+k}}u_{(n+k)xx}(L,t)=\frac{1}{a_{n+k+1}}u_{(n+k+1)xx}(0,t)+\frac{1}{a_{2n+k}}u_{(2n+k)xx}(L,t), \tag{7}$$

for $0<t<T$, $T=$ const. Furthermore, we assume that the functions $f_j(x,t)$, $j=\overline{1,3n-1}$, are smooth enough hand bounded. The initial conditions are given by:

$$u_j(x,0)=u_{0,j}(x), \quad x\in\overline{B_j}, \quad j=\overline{1,3n-1}. \tag{8}$$

It should be noted that the above vertex conditions are not the only possible ones. The main motivation for our choice is caused by the fact that they guarantee uniqueness of the solution and, if the solutions decay (to zero) at infinity, the norm (energy) conservation.

Refrences

1. Sobirov Z. A., Akhmedov M. I., Uecker H. *Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs.*

2. Noja D. *Nonlinear Schrodinger equations on graphs: recent results and open problems* // Phil. Trans. Roy Soc. A. 2014. 372, 20130002.

BLOW-UP PROBLEM FOR SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH GENERAL NONLINEARITIES IN EQUATION AND BOUNDARY CONDITION

A. Gladkov, M. Guedda

We consider the global solvability and blow-up in finite time for semilinear heat equation

$$u_t = \Delta u + \alpha(t) f(u) \text{ for } x \in \Omega, \ \ t > 0, \tag{1}$$

with nonlinear boundary condition

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \beta(t) g(u) \text{ for } x \in \partial\Omega, \ \ t > 0, \tag{2}$$

and initial datum

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ for } x \in \Omega, \tag{3}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ for $n \geqslant 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, ν is the unit exterior normal vector on the boundary $\partial\Omega$. Here $f(u)$ and $g(u)$ are nonnegative continuous functions for $u \geqslant 0$, $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ are nonnegative continuous functions for $t \geqslant 0$, $u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_0(x) \geqslant 0$ in $\overline{\Omega}$ and satisfies boundary condition (2) as $t = 0$. We will consider nonnegative classical solutions of (1)–(3).

We prove several blow-up results for (1)–(3).

Theorem 1. *Let $g(s)$ be a nondecreasing positive function for $s > 0$ such that*

$$\int^{+\infty} \frac{ds}{g(s)} < +\infty$$

and

$$\int_0^{+\infty} \beta(t)\, dt = +\infty.$$

Then any nontrivial nonnegative solution of (1)–(3) blows up in finite time.

Theorem 2. *Let $f(s) > 0$ for $s > 0$,*

$$\int^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty$$

and

$$\int_0^{+\infty} \alpha(t)\, dt = +\infty.$$

Then any nontrivial nonnegative solution of (1)–(3) blows up in finite time.

To formulate global existence result for problem (1)–(3) we suppose:

$$f(s) \text{ is a nonnegative locally Hölder continuous function for } s \geqslant 0, \tag{4}$$

$$\text{there exists } p > 0 \text{ such that } f(s) \text{ is a positive nondecreasing function for } s \in (0,p), \tag{5}$$

$$\int_0 \frac{ds}{f(s)} = +\infty, \quad \lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = 0, \tag{6}$$

$$\int_0^{+\infty} \big(\alpha(t) + \beta(t)\big)\, dt < +\infty \tag{7}$$

and there exist positive constants γ, t_0 and K such that $\gamma > t_0$ and

$$\int_{t-t_0}^{t} \frac{\beta(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \leqslant K \quad \text{for } t \geqslant \gamma. \tag{8}$$

Theorem 3. *Let (4)–(8) hold. Then problem (1)–(3) has bounded global solution for small initial datum.*

The results of the talk have been published in [1].

References

1. Gladkov A., Guedda M. *Influence of variable coefficients on global existence of solutions of semilinear heat equations with nonlinear boundary conditions* // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2020. № 63. P. 1–11.

CLASSICAL SOLUTION OF THE INITIAL-VALUE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL QUASILINEAR WAVE EQUATION

V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko

In this report we shall consider the question of global solvability in $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ of the initial-value problem

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - a^2\partial_x^2 u(t,x) + f\big(t,x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x)\big) = F(t,x), & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

where $a\in(0,\infty)$, φ and ψ are some real-valued functions defined on the real axis.

Theorem 1. *Assume $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$, $\psi\in C^1(\mathbb{R})$, $F\in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R})$, $f\in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^4)$ and f is Lipschitz continuous in the three last variables. Then there exists a unique classical solution u of the initial-value problem (1).*

Sketch of the proof. We will look for a solution u having the form $u = w + v$ where v solves the homogeneous wave equation

$$\begin{cases} \partial_t^2 v(t,x) - a^2\partial_x^2 v(t,x) = 0, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ v(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t v(0,x) = \psi(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

and w solves

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t,x) - a^2\partial_x^2 w(t,x) = F(t,x) - f\big(t,x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x)\big), & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ w(0,x) = \partial_t w(0,x) = 0, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

d'Alembert's Formula [1] lets us write

$$w(t,x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Big(F(\tau,\xi) - f\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi),\partial_t u(\tau,\xi),\partial_x u(\tau,\xi)\big)\Big)d\xi,\ \ (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

Hence our desired solution u must solve the nonlinear integro-differential identity

$$u(t,x) = K[u](t,x),\ \ (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}, \tag{2}$$

where K is the nonlinear mapping defined by the following formula

$$K[u](t,x) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Big(F(\tau,\xi) - f\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi),\partial_t u(\tau,\xi),\partial_x u(\tau,\xi)\big)\Big)d\xi,\ \ (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

Moreover, it is easy to show that under the conditions of smoothness of the functions φ, ψ, f, F specified in the formulation of this theorem any continuously differentiable solution u of (2) will be a twice continuously differentiable classical solution of the initial-value problem (1).

If $u,\widetilde{u}\in C^1([0,T]\times\mathbb{R})$, $\Omega = \mathrm{Conv}\big\{(0,-m),(0,m),(T,-m+aT),(T,m-aT)\big\}$, $m\in\mathbb{N}$, $T<1$, $m>aT$,

$$\|K[u]-K[\widetilde{u}]\|_{C^1(\Omega)} \leqslant LAT\|u-\widetilde{u}\|_{C^1(\Omega)},$$

where $A=\max\{1,\frac{1}{a}\}$, L is Lipschitz constant of f.

Fix T so small that K is a strict contraction. Observing also that

$$K : C^1([0,T]\times\mathbb{R}) \to C^1([0,T]\times\mathbb{R})$$

if T is small, we see from Banach's Theorem that K has a unique fixed point u which consequently solves the integro-differential identity (2).

We have therefore build a unique classical solution of (1) on $[0,T]\times\mathbb{R}$ provided $T>0$ is sufficiently small. We then extend the solution to the time intervals $[T,2T]$, $[2T,3T]$, etc. using matching conditions, to construct a unique classical solution exiting for all time.

References

1. Evans L. C. *Partial differential equations.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2010.

2. Vainberg M. M. *Integro-differential equations.* Itogi Nauki. Ser. Mat. Anal. Teor. Ver. Regulir. 1962, Moscow: VINITI, 1964, P. 5–37.

3. Tunitsky D. V. *On global solvability of one-dimensional quasilinear wave equations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. № 12. P. 2510–2524.

GLOBAL CORRECTNESS THEOREM TO GOURSAT PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS ADJOINT MODEL TELEGRAPH EQUATION IN THE UPPER HALF-PLANE

F.E. Lomovtsev

In the upper half-plane $G =]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$ it is required to find a classical solution and a correctness criterion to the Goursat problem for the adjoint model telegraph equation

$$v_{\tau\tau}(s,\tau) - (a^2(s,\tau)v(s,\tau))_{ss} + (a^{-1}(s,\tau)a_\tau(s,\tau)v(s,\tau))_\tau + (a(s,\tau)a_s(s,\tau)v(s,\tau))_s = f(s,\tau), \quad (1)$$

for all points (s,τ) of curvilinear characteristic triangles $\Delta MPQ \subset G$, and on its curvilinear characteristic sides MP and QM under the Goursat conditions

$$v(s,\tau) = \gamma_1(s,\tau), \;\; s = h_1\{g_1(x,t),\tau\}, \;\; v(s,\tau) = \gamma_2(s,\tau), \;\; s = h_2\{g_2(x,t),\tau\}, \quad (2)$$

and at the intersection points $M(x,t)$ of these characteristics, the Goursat data matching condition

$$\gamma_1(x,t) = \gamma_2(x,t), \;\; (x,t) \in G. \quad (3)$$

Here the right-hand side f of the equation and the Goursat data γ_1, γ_2 are given real functions of the variables s and τ, and the coefficient $a(s,\tau) \geqslant a_0 > 0$, $(s,\tau) \in G$, of the equation.

Equation (1) has differential characteristic equations $ds = (-1)^i a(s,\tau)d\tau$, $i = 1, 2$, which correspond in G to two families of characteristics $g_i(s,\tau) = C_i$, $C_i \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $i = 1, 2$. If the coefficient $a(s,\tau) \geqslant a_0 > 0$, $(s,\tau) \in G$, then the variable τ on the characteristic $g_1(s,\tau) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, strictly decreases, and on characteristic $g_2(s,\tau) = C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$, strictly increases with s. Therefore, the implicit functions $y_i = g_i(s,\tau)$, $s \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, have explicit strictly monotonic inverse functions $s = h_i\{y_i,\tau\}$, $\tau \geqslant 0$, and $\tau = h^{(i)}[s,y_i]$, $s \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. By the definition of inverse functions, they satisfy the inversion identities from [1]:

$$g_i(h_i\{y_i,\tau\},\tau) = y_i \;\; \forall\, y_i, \quad h_i\{g_i(s,\tau),\tau\} = s, \;\; s \in \mathbb{R}, \;\; i = 1, 2,$$

$$g_i(s, h^{(i)}[s,y_i]) = y_i \;\; \forall\, y_i, \quad h^{(i)}[s, g_i(s,\tau)] = \tau, \;\; \tau \geqslant 0, \;\; i = 1, 2,$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[s,y_i]\} = s, \;\; s \in \mathbb{R}, \;\; h^{(i)}[h_i\{y_i,\tau\}, y_i] = \tau, \;\; \tau \geqslant 0, \;\; i = 1, 2.$$

If the coefficient is $a \in C^2(G)$, then the functions g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2$ by s, τ, y_i, $i = 1, 2$, [1].

The concept of global correctness theorems with explicit solutions and Hadamard correctness criteria (necessary and sufficient conditions) of linear mixed problems was introduced in [2].

Theorem 1. *Let the coefficient be $a(s,\tau) \geqslant a_0 > 0$, $(s,\tau) \in G$, $a \in C^2(G)$. In every triangle $\Delta MPQ \subset G$ the Goursat problem (1)–(3) has a unique and f, γ_1, γ_2-stable classical solution $v \in C^2(\Delta MPQ)$ if and only if $f \in C(G)$ and the smoothness requirements*

$$H_i(s,\tau) \equiv \int_0^\tau f\big(h_i\{g_i(s,\tilde\tau),\tilde\tau\},\tilde\tau\big)\, d\tilde\tau \in C^1(G), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

For $\forall\, M(x,t) \in G$, this solution to the Goursat problem (1)–(3) in $\Delta MPQ \subset G$ is the function

$$v(s,\tau;x,t)=\big\{[a(\tilde s,\tilde\tau)\gamma_2(\tilde s,\ \tilde\tau)-F(\tilde s,\tilde\tau)]|_{\tilde s=h_2\{g_2(x,t),\,\tilde\tau\}}|_{\tilde\tau=\tau_1(g_1(s,\tau))}+$$

$$+[a(\tilde s,\tilde\tau)\gamma_1(\tilde s,\tilde\tau)-F(\tilde s,\tilde\tau)]|_{\tilde s=h_1\{g_1(x,t),\,\tilde\tau\}}|_{\tilde\tau=\tau_2(g_2(s,\tau))}- \tag{5}$$

$$-[a(\tilde s,\tilde\tau)\gamma_2(\tilde s,\tilde\tau)-F(\tilde s,\tilde\tau)]|_{\tilde s=h_2\{g_2(x,t),\,\tilde\tau\}}|_{\tilde\tau=\tau_1(g_1(x,t))}+F(s,\tau)\big\}/a(s,\tau),\ (s,\tau)\in\Delta MPQ\subset G,$$

where the particular classical solution of the equation (1) is the product of $1/a(s,\tau)$ *by*

$$F(s,\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau}d\tilde\tau\int\limits_{h_2\{g_2(s,\tau),\,\tilde\tau\}}^{h_1\{g_1(s,\tau),\,\tilde\tau\}}f(\tilde s,\tilde\tau)\,d\tilde s,$$

$\tau_1(y)$, $\tau_2(z)$ *are inverse functions to functions*

$$y=g_1\big(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau\big),\quad z=g_2\big(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau\big).$$

Sketch of the proof. The Goursat problem (1)–(3) is solved by the characteristic method. To find the general integral of the equation (1) on G, in it we pass to new variables

$$\xi=g_1(s,\tau),\quad \eta=g_2(s,\tau) \tag{6}$$

with non-degenerate Jacobian $J(s,\tau)=\xi_s\eta_\tau-\xi_\tau\eta_s\neq 0$ in G, since $a(s,\tau)\geqslant a_0>0$, $(s,\tau)\in G$. By replacing (6) the wave equation (1) for the new function $\tilde v(\xi,\eta)=v(s(\xi,\eta),\tau(\xi,\eta))$ reduced to canonical form

$$\big(\tilde a(\xi,\eta)\tilde v(\xi,\eta)\big)_{\xi\eta}=\tilde f(\xi,\eta)/[2J(s,\tau)],\ (\xi,\eta)\in\widetilde G, \tag{7}$$

where the coefficient $\tilde a(\xi,\eta)=a(s(\xi,\eta),\tau(\xi,\eta))$, the right-hand side $\tilde f(\xi,\eta)=f(s(\xi,\eta),\tau(\xi,\eta))$ and the set $\widetilde G=\{(\nu,\rho):h_2\{\rho,0\}\leqslant h_1\{\nu,0\},\ \nu,\rho\in\mathbb R\}$.

Integrating equation (7) over the triangle $\triangle\tilde M\tilde P\tilde Q\subset\widetilde G$, we find its general integral

$$\tilde a(\xi,\eta)\tilde v(\xi,\eta)=\tilde f_1(\xi)+\tilde f_1(\eta)+\tilde F(\xi,\eta), \tag{8}$$

where triangle $\triangle\tilde M\tilde P\tilde Q$ is the image of triangle $\triangle MPQ$ under mapping (6), the function $\tilde F$ is

$$\tilde F(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\int\limits_{g_2(h_1\{\xi,0\},0)}^{\eta}d\rho\int\limits_{g_1(h_2\{\rho,0\},0)}^{\xi}\tilde f(\nu,\rho)\,J(\nu,\rho)\,d\nu,$$

$J(\xi,\eta)=s_\xi\tau_\eta-s_\eta\tau_\xi\neq 0$ is the Jacobian of the inversely replacing to variables (6) on the set $\widetilde G$ and the product of these Jacobians is $J(\xi,\eta)J(s,\tau)=1$. From the general integral (8) by inverse replacement to variables (6) we derive the general integral of the equation (1)

$$v(s,\tau)=\big[\tilde f_1\big(g_1(s,\tau)\big)+\tilde f_1\big(g_2(s,\tau)\big)+F(s,\tau)\big]/a(s,\tau), \tag{9}$$

where $\tilde f_1$ and $\tilde f_2$ are any twice continuously differentiable functions of ξ and η of the form

$$\tilde f_1(\xi)=f_1(\xi)+f_2\big(g_2(x,t)\big),\quad \tilde f_2(\eta)=f_2(\eta)-f_2\big(g_2(x,t)\big).$$

We substitute the general integral (9) into the Goursat conditions (2) and obtain the formal solution (5). Then we show the necessity and sufficiency of the smoothness $f\in C(G)$ and (4).

Corollary 1. *If the right-hand side f of the equation (1) does not depend on s or τ in G, then the assertion of Theorem 1 is valid without integral smoothness requirements (4).*

Here, for a continuous right-hand side f in τ or s smoothness (4) always holds.

Remark 1. In the case $F = 0$, solution (5) serves as the Riemann function into Riemann formula of solutions to all mixed problems for the inhomogeneous model telegraph equation [3].

Aknowledgement. Supported by BRFFI (project No. F22KI-001 dated November 05, 2021).

Refrences

1. Lomovtsev F. E. *The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line* // Zhurn. Belarusian. state university. Maths. Informatics. 2021. № 1. P. 18–38.

2. Lomovtsev F. E. *Global Hadamard correctness theorem to the first mixed problem for the wave equation in a half-strip of the plane* // Bulletin of Grodzensk Jarzhaunaga University named after Yanka Kupala. Ser. 2. Maths. Physics. Information, special equipment and kiravanne. 2021. V. 11. № 1. P. 68–82.

3. Lomovtsev F. E. *Riemann Formula of the Classical Solution to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line* // Tez. dokl. Seventh Bogdanov Readings on ordinary differential equations dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor Yu.S. Bogdanov (Minsk, June 1–4, 2021). Minsk, 2021. P. 201–203.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина, Е.Г. Шагова

В приложениях дифференциальные уравнения используются для моделирования процессов, происходящих в физических объектах. При классическом подходе считается, что состояние объекта описываются функциями, являющимися решениями рассматриваемых уравнений. Понятие состояния не абсолютное, так как оно зависит от множества измерений, доступных при рассматривамых экспериментах. Считается, что могут быть проведены измерения заданной системы только с помощью некоторого множества приборов (наблюдаемых величин), которое обозначим $\mathcal{D}$.

Множество Z называется *пространством состояний заданной системы, соответствующим заданному множеству наблюдаемых* $\mathcal{D}$, если каждой наблюдаемой величине прибора $\varphi \in \mathcal{D}$ соответствует однозначно определенный результат наблюдения $< z, \varphi >$.

С этой точки зрения при описании состояний с помощью функций считается, что возможны измерения значений таких функций во всех точках. Однако не существует приборов, измеряющих значения физических величин в заданной точке, а результаты реальных измерений всегда представляют собой только некоторые усредненные величины. Это учитывается при описании состояний с помощью обобщенных функций, где считается, что каждая основная функция φ из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ соответствует измерительному прибору (такие функции часто называют *приборными*), а распределение ставит в соответствие каждому φ определенное число, т.е. задает состояние в описанном выше смысле [1].

Сказанное означает, что описание состояний с помощью обобщенных функций является уточнением математической модели и в такой модели нужны решения рассматриваемых уравнений, являющиеся обобщенными функциями. Поэтому возникает задача о построении обобщенных решений дифференциальных уравнений. Если состояние в первоначальном смысле задавалось обычной локально интегрируемой функцией u, то ему соответствует однозначно определенное *регулярное распределение*

$$\langle U, \varphi \rangle = \int u(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Однако классические решения уравнений могут быть сингулярными функциями, имеющими неинтегрируемые особенности, такая функция не задает однозначно определенное распределение и не задает состояние объекта. Например, функция $u(x) = \dfrac{1}{x}$ не является локально интегрируемой и формула (1) не ставит с соответствие этой функции непрерывный линейный функционал, так как интеграл может расходиться. При этом, если φ принадлежит подпространству

$$\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\},$$

то интегралы в (1) существуют и задают на этом подпространстве непрерывный линейный функционал. Поэтому функции $\dfrac{1}{x}$ соответствует семейство распределений, полученных продолжениями этого функционала на все пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Это распределения вида

$$Q_M = P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta, \tag{2}$$

где M – произвольная постоянная, $\langle \delta_\tau, \varphi \rangle = \varphi(\tau)$ – дельта-функция Дирака, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ – обобщенная функция, заданная с помощью интеграла в смысле главного значения по Коши.

Возникает вопрос о том, какую из обобщенных функций, соответствующих классическому решению, можно считать обобщенным решением.

Обычно решением уравнения называется функция или обобщенная функция, которая при подстановке в уравнение дает тождественное равенство. Ввиду того, что решения с особенностями могут иметь линейные уравнения с сингулярными коэффициентами, либо нелинейные уравнения, при подстановке обобщенной функции в такое уравнение возникают произведения или другие выражения, которые не определены в теории обобщенных функций. Таким образом, для рассматриваемых уравнений стандартное определение решения не имеет смысла и построению обобщенных решений предшествует вопрос о том, что можно считать обобщенным решением.

Общая идея введения обобщенных решений основана на построении вспомогательных семейств функций $u_\varepsilon(x)$, зависящих от малого параметра ε, таких, что предел такого семейства в пространстве распределений естественно считать обобщенным решением.

В случае линейных уравнений с сингулярными или обобщенными коэффициентами рассматриваются аппроксимации коэффициентов семействами гладких функций и тогда $u_\varepsilon(x)$ задаются как решения соответствующих аппроксимирующих уравнений.

Существование предела семейства $u_\varepsilon(x)$ не является общим фактом, и при разных аппроксимациях пределы могут быть разными. Две аппроксимации коэффициента считаются *эквивалентными*, если указанные пределы существуют и совпадают.

Поэтому в множестве аппроксимаций коэффициентов возникают классы эквивалентных и для однозначного нахождения обобщенного решения требуется задать класс аппроксимаций. В приложениях коэффициенты уравнения обычно описывают свойства среды, в которой происходит рассматривамый процесс.

Но из сказанного следует, что описание свойств среды с помощью функций или даже обобщенных функций не позволяет получить однозначное описание состояния объекта, а корректная математическая модель должна включать описание состояний среды с помощью классов эквивалентных аппроксимаций коэффициентов.

С технической точки зрения задача сводится к описанию асимптотического поведения решений уравнения с малым параметром при стремлении малого параметра к нулю. Ответ на вопрос о том, при каких аппроксимациях коэффициента $\dfrac{s}{x}$ существует предел решений аппроксимирующих уравнений, неизвестен даже для простешего скалярного линейного дифференциального уравнения

$$u'(x) + \frac{s}{x}u(x) = 0. \tag{3}$$

В работах [2–4] рассмотрены обобщенные решения уравнения (3), порожденные аналитическими продолжениями коэффициента на комплексную плоскость.

Решения задачи Коши для нелинейного уравнения на прямой (это второе уравнение из иерархии Риккати)

$$u''(x) + \gamma^2 u^3(x) + 3\gamma u(x)u'(x) = 0 \tag{4}$$

имеют неинтегрируемые особенности. Для них в качестве аппроксимаций $u_\varepsilon(x)$ рассматриваются решения задачи Коши с такими начальными условиями, при которых они являются гладкими функциями.

Литература

1. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.

2. Антоневич А. Б., Шагова Т. Г. *Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом* // Таврический Вестник Информатики и Математики. 2019. № 3. С. 23–36.

3. Антоневич А. Б., Шагова Т. Г. *Умножение распределений и алгебры мнемофункций* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65. № 3. С. 339–389.

4. Антоневич А. Б., Кузьмина Е. В. *Решения дифференциального уравнения* $u' + \frac{s}{x}u = 0$ *в пространстве распределений* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 56—66.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И РАЗНОСТНОЙ ТРАКТОВКАХ РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

З.В. Бештокова

1. Постановка задачи и априорная оценка в дифференциальной форме. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \,:\, 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int\limits_0^t K(x,t,\tau)u(x,\tau)\,d\tau = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}u - \mu_{-\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}u - \mu_{+\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x,t)u,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1,\ |r_\alpha(x,t)|,\ |k_{x_\alpha}(x,t)|,\ |r_{x_\alpha}(x,t)|,\ |q_\alpha(x,t)|,\ |\beta_{\pm\alpha}(x,t)| \leqslant c_2,$$

$$k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}\left(\overline{Q}_T\right),\ r_\alpha(x,t),\ q_\alpha(x,t),\ K(x,t,\tau),\ f(x,t) \in C^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t, \tag{4}$$

$$c_0, c_1, c_2 - \text{положительные постоянные}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p, \quad Q_T = G \times (0 < t \leqslant T].$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения и граничных условий (1)–(3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x,t)$ в цилиндре $\overline{Q}_T$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4), тогда для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_0^2 \leq M(T)\left(\int\limits_0^t \left(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\left(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\right)dx'\right)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2\right),$$

где $M(T)$ зависит только от входных данных задачи (1)-(3).

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы.

В замкнутой области $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\}, \quad \overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, m,\ m\tau = T\},$$

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p}\overline{\omega}_{h_\alpha}, \quad \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)-(3) поставим в соответствие разностную схему, порядка аппроксимации $O\big(|h| + \tau\big)$:

$$y_{\bar t} + \sum_{j'=0}^{j} K(x, t_j, t_{j'})y(x, t_{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau = \Lambda(\widetilde{t})y + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha,0} = \beta_{-\alpha}\, y_0 - \mu_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \\ -a_{+\alpha} y_{\bar x_\alpha, N_\alpha} = \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha} - \mu_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \tag{6}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{7}$$

где $\Lambda(\widetilde{t}) = \sum\limits_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha(\widetilde{t}), \quad \Lambda_\alpha(\widetilde{t})y_{(\alpha)} = \big(a_\alpha y_{\bar x_\alpha}\big)_{x_\alpha} + r_\alpha^+ y_{x_\alpha} + r_\alpha^- y_{\bar x_\alpha} - d_\alpha y,$

$$y_{\bar x_\alpha} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_\alpha}, \quad y_{x_\alpha} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\alpha}, \quad y_{\bar t} = \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau}, \quad y = y^j,\ \check y = y^{j-1},\ a_\alpha = k_\alpha(x^{-0.5\alpha}, \widetilde{t}_j),$$

$$d_\alpha = q_\alpha(x, \widetilde{t}_j), \quad \varphi_i = f(x, \widetilde{t}_j),\ r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \quad |r_\alpha| = r_\alpha^+ - r_\alpha^-, \quad r_\alpha^+ = 0.5(r_\alpha + |r_\alpha|) \geqslant 0,$$

$$r_\alpha^- = 0.5(r_\alpha - |r_\alpha|) \leqslant 0, \quad x^{-0.5\alpha} = x_1,\ \ldots,\ x_{\alpha-1},\ x_\alpha - 0.5h_\alpha,\ x_{\alpha+1}, \ldots,\ x_p,$$

$$\widetilde{t} = (j + 0.5)\tau = t_j + 0.5\tau = t_{j+0.5}, \quad t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha\tau}{p} = \left(j + \frac{\alpha}{p}\right)\tau, \quad \tau, h \text{ – шаги сетки.}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (4), тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий для решения разностной задачи (5)–(7) при малом $\tau \leqslant \tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ справедлива априорная оценка*

$$\|y^j\|^2 \leqslant M\left(\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\varphi\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta \neq i_\alpha}\left(\mu_{+\alpha}^2 + \mu_{-\alpha}^2\right)H/h_\alpha\right)\tau + \|y^0\|^2\right) \tag{8}$$

на каждом временном слое в сеточной норме $L_2(G)$, где M – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Таким образом, доказаны единственность и устойчивость решения разностной задачи (5)–(7) по начальным данным и правой части в сеточной норме $L_2(G)$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1)–(3), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ – решение разностной задачи (5)–(7). Обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность аппроксимации, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в (5)–(7), получим задачу для z:

$$z_{\bar t} + \sum_{j'=0}^{j} K(x,t_j,t_{j'})z(x,t_{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau = \Lambda(\widetilde{t})z + \Psi, \quad (x,t)\in\omega_{h\tau}\,, \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha,0} = \beta_{-\alpha} z_0 - \nu_{-\alpha}\,, \quad x=0,\\ -a_{+\alpha} z_{\bar x_\alpha, N_\alpha} = \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha} - \nu_{+\alpha}\,, \quad x=l_\alpha, \end{cases} \tag{10}$$

$$z(x,0)=0, \quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{11}$$

где $\Psi = O\big(|h|+\tau\big)$, $\nu_{-\alpha} = O\big(|h|+\tau\big)$, $\nu_{+\alpha} = O\big(|h|+\tau\big)$ – погрешности аппроксимации на решении задачи (1)–(3).

Применяя априорную оценку (8) к решению задачи (9)–(11), получим

$$\|z^j\|^2 \leqslant M\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\psi^{j'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\nu_{+\alpha}^2+\nu_{-\alpha}^2\right)H/h_\alpha\right)\tau, \tag{12}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от |h| и τ, где $|h| = h_1+h_2+...+h_p$.

Из априорной оценки (12) следует сходимость схемы (5)–(7) со скоростью $O(|h|+\tau)$ в сеточной норме $L_2(G)$.

Литература

1. Андреев В. Б. *О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 6. С. 1218–1231.

2. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1983.

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

А.В. Васильев, В.Б. Васильев, А.А. Ходырева

В работе рассматривается одна дискретная краевая задача, порожденная дискретным эллиптическим псевдодифференциальным оператором, устанавливается ее однозначная разрешимость в дискретном пространстве Соболева–Слободецкого и описываются ее аппроксимационные свойства.

Пусть $\mathbb{Z}^2$ – целочисленная решетка на плоскости. Обозначим

$$K = \{x\in\mathbb{R}^2 : x=(x_1,x_2),\ x_1>0,\ x_2>0\}$$

первый квадрант на плоскости, $k_s = h\mathbb{Z}^2\cap K$, $h>0$. Введем пространство функций дискретного аргумента $u_d(\tilde x)$, $\tilde x = (\tilde x_1,\tilde x_2)\in h\mathbb{Z}^2$.

Обозначим $\mathbb{T}^2$ квадрат $[-\pi,\pi]^2$, $h>0$, $\hbar = h^{-1}$. Будем рассматривать функции, изначально заданные в квадрате, как периодические функции, определенные на всей плоскости $\mathbb{R}^m$ с основным квадратом периодов $\mathbb{T}^2$.

Для таких функций можно определить дискретное преобразование Фурье формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde u_d(\xi) = \sum_{\tilde x\in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde x\cdot\xi} u_d(\tilde x)h^2, \quad \xi\in\hbar\mathbb{T}^2,$$

в случае сходимости такого ряда, и функция $\tilde{u}_d(\xi)$ будет периодической функций в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$.

С помощью разделенных разностей и их дискретных преобразований Фурье мы определим дискретные пространства Соболева–Слободецкого для исследования разрешимости широкого класса дискретных уравнений. Вводится *дискретный аналог пространства Шварца* и обозначение

$$\zeta^2 = h^{-2}\big((e^{-ih\cdot\xi_1}-1)^2+(e^{-ih\cdot\xi_2}-1)^2\big).$$

Определение 1. *Пространство* $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит их дискретных (обобщенных) функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ по норме

$$||u_d||_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}(1+|\zeta^2|)^s|\tilde{u}_d(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Пространство $H^s(K_d)$ состоит их дискретных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, чьи носители содержатся в $\overline{K_d}$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$.

Если $\widetilde{A}_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция в $\mathbb{R}^2$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$, то мы называем ее *символом.*

Определение 2. *Дискретным псевдодифференциальным оператором* A_d *с символом* $\widetilde{A}_d(\xi)$ *в дискретном квадранте* K_d называется оператор следующего вида

$$(A_du_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2} h^2\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}\widetilde{A}_d(\xi)e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi}\tilde{u}_d(\xi)\,d\xi,\quad \tilde{x}\in K_d.$$

Говорят, что *оператор* A_d *– эллиптический*, если

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^2}|\widetilde{A}_d(\xi)|>0.$$

Мы будем рассматривать класс символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2}\leqslant|\tilde{A}_d(\xi)|\leqslant c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Мы исследуем разрешимость дискретного уравнения

$$(A_du_d)(\tilde{x})=0,\quad \tilde{x}\in K_d, \tag{1}$$

в пространстве $H^s(K_d)$ с граничными условиями

$$\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}_+}u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h=f_d(\tilde{x}_2),\qquad \sum_{\tilde{x}_2\in h\mathbb{Z}_+}u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h=g_d(\tilde{x}_1),\ \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}_{++}}u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h^2=0. \tag{2}$$

При наличии специальной периодической волновой факторизации символа $\tilde{A}_d(\xi)$ с индексом æ таким, что $æ - s = 1+\delta$, $|\delta|<1/2$, можно отметить следующий факт.

Теорема 1. *Пусть* f_d, $g_d\in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z})$ *. Тогда дискретная краевая задача (1), (2) имеет единственное решение с априорной оценкой*

$$||u_d||_s\leqslant \mathrm{const}(||f_d||_{s+1/2}+||g_d||_{s+1/2})$$

с постоянной, не зависящей от h.

Континуальный аналог – это следующая краевая задача

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)\, dx_1 = f(x_2), \quad \int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)\, dx_2 = g(x_1), \quad \int\limits_K u(x)\, dx = 0, \tag{4}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2(1 + |\xi|)^\alpha$$

и допускающим волновую факторизацию относительно K с индексом æ таким, что $æ - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$. Специальный подбор дискретных функций f_d, g_d и элементов периодической волновой факторизации приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть* $f, g \in S(\mathbb{R})$, $æ > 1$. *Тогда справедлива следующая оценка для решений* u *и* u_d *континуальной задачи (3), (4) и ее дискретного аналога (1), (2)*

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leqslant C(f, g)h^\beta,$$

где постоянная $C(f, g)$ *зависит от функций* f *и* g, *величина* $\beta > 0$ *может быть произвольной.*

Общие вопросы о разрешимости уравнения (1) были рассмотрены в [1,2], оценки погрешности дискретных решений некоторых других дискретных краевых задач – в [3,4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Литература

1. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space* // Math. Model. Anal. 2018. V. 23. № 3. P. 492–506.

2. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *On some discrete potential like operators* // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 195–212.

3. Васильев В. Б., Тарасова О. А. *О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах* // Итоги науки и техники. Современные математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 174. С. 12–19.

4. Tarasova O. A., Vasilyev V. B. *To the theory of discrete boundary value problems.* 4Open, 2019.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Васильев, В.Б. Васильев, Н.В. Эберлейн

В пространстве Соболева–Слободецкого H^s рассматривается следующая задача: найти функцию

$$U(x) = \begin{cases} u_+(x), & x \in C_+^a, \\ u_-(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a} \end{cases}$$

такую, что $u_+ \in H^s(C_+^a)$, $v_- \in H^s(\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{cases} (Au_+)(x) = 0, & x \in C_+^a, \\ (Au_-)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \end{cases} \tag{1}$$

где $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > a|x_1|, \ a > 0\}$, $\Gamma = \partial C_+^a$, A – эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$,

$$c_1 \leqslant |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \leqslant c_2.$$

К уравнениям (1) мы добавляем следующие граничные условия:

$$\theta \cdot u_{+|\partial C_+^a} + \omega \cdot u_{-|\partial C_+^a} = \mu, \quad \eta \cdot \left(\frac{\partial u_+}{\partial n}\right)_{|\partial C_+^a} + \gamma \cdot \left(\frac{\partial u_-}{\partial n}\right)_{|\partial C_+^a} = \nu, \tag{2}$$

где θ, ω, η, γ – комплексные числа, принимающие различные значения на сторонах угла ∂C_+^a; $\mu \in H^{s-1/2}(\Gamma)$, $\nu \in H^{s-3/2}(\Gamma)$ – заданные на Γ функции.

Подобная задача рассматривалась в [1] при дополнительных предположениях относительно символа $A(\xi)$ и была сведена к некоторой системе одномерных интегральных уравнений, которую мы обозначим (X). Предполагалось, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию (см. также [2,3,4], где рассматривались другие краевые задачи) относительно конуса C_+^a

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с индексом æ таким, что $æ - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$.

Ниже мы приведем описание терминов, использованных в постановке задачи.

Пространство Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^2)$ – это гильбертово пространство с нормой

$$||f||_s = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\tilde{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s}\, d\xi\right)^{1/2},$$

где $\tilde{f}$ обозначает преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

Если $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, то $H^s(D)$ – это подпространство $H^s(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций с носителями в $\overline{D}$.

Пусть $A(\xi)$ – измеримая функция, определенная на $\mathbb{R}^2$. *Псевдодифференциальным оператором* A *в области* D *с символом* $A(\xi)$ называется следующий оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\not{2}}} e^{ix\cdot\xi} A(\xi)\tilde{u}(\xi) d\xi, \quad x \in D.$$

С помощью элементов волновой факторизации $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ строятся функции $b_j(t_{3-j})$, $B_j(t_{3-j})$, $j = 1, 2$. Использование преобразования Меллина позволяет получить следующую редукцию.

Теорема 1. *Пусть* $æ = \alpha/2$ *и сомножители* $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ *однородны степени* $\alpha/2$ *и дифференцируемы вне начала координат,*

$$b_j(t_{3-j}) \neq 0, \quad B_j(t_{3-j}) \neq 0, \quad j = 1, 2, \quad \forall t_1, t_2 \neq 0.$$

Тогда система линейных интегральных уравнений (X) *эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений (3) относительно неизвестных функций*

$$\hat{C}_k(\lambda), \ \hat{D}_k(\lambda), \ \hat{R}_k(\lambda), \ \hat{Q}_k(\lambda), \quad k = 1, 2.$$

Все коэффициенты системы (3) и правые части также вычисляются по элементам $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ и заданным граничным условиям. Если матрицу системы обозначить $\mathcal{A}(\lambda)$, то получается следующий критерий разрешимости задачи линейного сопряжения (1), (2).

$$\left\{\begin{array}{r} \theta_1\hat{k}_{11}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\theta_1\hat{k}_{21}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\theta_1 l_{11}\hat{D}_1(\lambda)+\\ +\omega_1\hat{m}_{11}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\omega_1\hat{m}_{21}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\omega_1\hat{Q}_1(\lambda)=\hat{\mu}_{11}(\lambda),\\ \theta_1\hat{k}_{12}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\theta_1\hat{k}_{22}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\theta_1 l_{12}\hat{D}_2(\lambda)+\\ +\omega_1\hat{m}_{12}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\omega_1\hat{m}_{22}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\omega_1\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{12}(\lambda),\\ \theta_2 l_{21}\hat{C}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{11}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{21}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\ +\omega_2\hat{R}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{11}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{21}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{21}(\lambda),\\ \theta_2 l_{22}\hat{C}_2(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{12}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{22}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\ +\omega_2\hat{R}_2(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{12}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{22}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{22}(\lambda),\\ \eta_1\hat{K}_{11}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\eta_1\hat{K}_{21}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\eta_1 L_{11}\hat{D}_1(\lambda)+\\ +\gamma_1\hat{M}_{11}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_1\hat{M}_{21}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_1\hat{Q}_1(\lambda)=\hat{\nu}_{11}(\lambda),\\ \eta_1\hat{K}_{12}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\eta_1\hat{K}_{22}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\eta_1 L_{12}\hat{D}_2(\lambda)+\\ +\gamma_1\hat{M}_{12}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_1\hat{M}_{22}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_1\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{12}(\lambda),\\ \eta_2 L_{21}\hat{C}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{11}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{21}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\ +\gamma_2\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{11}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{21}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{21}(\lambda),\\ \eta_2 L_{22}\hat{C}_2(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{12}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{22}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\ +\gamma_2\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{12}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{22}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{22}(\lambda). \end{array}\right. \tag{3}$$

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 условие*

$$\inf|\det\mathcal{A}(\lambda)|>0, \quad \Re\lambda=1/2$$

является необходимым и достаточным для существования единственного решения задачи (1), (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Литература

1. Vasilyev V. B. *On some transmission problems in a plane corner* // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. V. 63. P. 291–301.

2. Vasilyev V. B. *Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems* // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 18. P. 9252–9263.

3. Васильев В. Б. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в многомерном конусе* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1356–1365.

4. Vasilyev V. B. *On certain 3D limit boundary value problem* // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 5. P. 913–921.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ АНТИПЕРСИСТЕНТНЫМИ ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

М.М. Васьковский

Предположим, что на полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задано $\mathcal{F}_t$-согласованное дробное броуновское движение X_t с показателем Херста $H\in(0,1/2)$. Согласно [1] определим геометрическую грубую траекторию $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)$, $\mathbf{X}^i_{s,t}=\frac{(X_t-X_s)^i}{i!}$, $s,t\in\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $i=1,\ldots,n$, $n=[1/H]$.

Далее $\mathbf{X}_{0,t}$ будем обозначать через $\mathbf{X}_t$. Выберем и зафиксируем произвольное число $\alpha \in (0, H)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\, d\mathbf{X}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – функция, имеющая непрерывные и ограниченные производные любого порядка $k \in \{0, \dots, n+1\}$, $f(0) = 0$.

Определение 1. Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. *Решением уравнения (1) с начальным условием* $Y_0 = \xi$ будем называть $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс, почти все траектории которого принадлежат $C^\alpha(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, и такой, что п.н. для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s)\, d\mathbf{X}_s, \tag{2}$$

где интеграл в правой части соотношения (2) понимается как грубый потраекторный интеграл [1, 2].

Определение 2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (1) *устойчиво по вероятности*, если для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ такое, что для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \delta$ п.н., выполняется неравенство

$$P\Big(\sup_{t \geqslant 0} |Y_t| \geqslant \varepsilon_1\Big) \leqslant \varepsilon_2,$$

где Y – решение уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = \xi$. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (1) *асимптотически устойчиво по вероятности*, если оно устойчиво по вероятности, и существует $\Delta > 0$ такое, что для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \Delta$ п.н., имеет место сходимость по вероятности

$$Y_t \xrightarrow[t \to +\infty]{P} 0.$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$. *Если нулевое решение уравнения* $dZ_t = f(Z_t)\, dt$ *устойчиво по Ляпунову (соответственно асимптотически устойчиво) при* $t \geqslant 0$, *то нулевое решение уравнения (1) устойчиво по вероятности (соответственно асимптотически устойчиво по вероятности).*

Литература

1. Васьковский М. М. *Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1305–1317.

2. Васьковский М. М. *Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1443–1449.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА С ОПЕРАТОРОМ СВЕРТКИ

Ю.П. Вирченко, А.С. Мазманишвили

В сообщении предлагается решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода на отрезке $[0, t]$ в пространстве $\mathbb{L}_2[0, T]$, интегральное ядро которого представляет преобразование свертки

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda \int_0^t K(t - x, y) f(y)\, dt\,. \tag{1}$$

В частном случае, когда ядро $K(x, y)$ имеет вид

$$K(x,y) = K \exp\big(-\nu|x-y|\big)$$

с произвольными постоянными $\nu > 0$, $K > 0$ вычислен детерминант и резольвента Фредгольма. Это вычисление основано на расщеплении пространства $\mathbb{L}_2[0,T]$ в прямую сумму двух пространств $\mathbb{L}_2^{(+)}[0,T] \oplus \mathbb{L}_2^{(-)}[0,T]$, которые состоят, соответственно, из четных и нечетных функций относительно операции преобразования аргумента $x \Rightarrow t-x$. В соответствии с этим, вводится четырехкомпонентный вектор

$$\big\langle -f(t-x), f(t-x), -f(x), f(x) \big\rangle$$

и, в результате, вычисление детерминанта Фредгольма $Q(\lambda)$, который представляется в виде $Q(\lambda) = Q_+(\lambda)Q_-(\lambda)$, сводится к нахождению фундаментального решения $U(t)$ динамической системы с постоянными коэффициентами четвертого порядка и на его основе построению решения краевой задачи для этой системы, удовлетворяющего конкретным граничным условиям в точках $x=0$, $x=T$ и $x=T/2$. Фундаментальное решение $U(t)$ задается следующими формулами

$$U(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} C_+ + \nu S_+ - \lambda K S_- & -\lambda K S_- & -\lambda S_+ & C_- - \lambda K S_+ + \nu S_- \\ \lambda K S_- & C_+ - \nu S_+ + \lambda K S_- & C_- + \lambda K S_+ - \nu S_- & \lambda k S_+ \\ \lambda K S_+ & C_- + \lambda K S_+ - \nu S_- & C_+ - \nu S_+ + \lambda K S_- & \lambda k S_- \\ C_- - \lambda K S_+ + \nu S_- & -\lambda K S_- & -\lambda S_- & C_+ + \nu S_+ - \lambda K S_- \end{pmatrix},$$

$$C_\pm(t) = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{ch}(a_+(\lambda)t) \pm \operatorname{ch}(a_-(\lambda)t)\Big], \quad S_\pm(t) = \frac{1}{2}\Big[\frac{\operatorname{sh}(a_+(\lambda)t)}{a_+(\lambda)} \pm \frac{\operatorname{sh}(a_-(\lambda)t)}{a_-(\lambda)}\Big].$$

Представим формулы, полученные в результате вычислений, согласно описанному методу

$$Q_\pm(\lambda) = e^{\nu t/4}\Big[\operatorname{ch}(a_\pm(\lambda)t/2) + \frac{\nu}{a_\pm(\lambda)}\operatorname{sh}(a_\pm(\lambda)t/2)\Big]^{-1/2}, \quad a_\mp(\lambda) = \sqrt{\nu^2 \pm 2\nu\Lambda}. \quad (2)$$

Литература

1. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. *Распределение вероятностей случайного функционала свёртки от нормального марковского процесса* // Проблемы передачи информации. 1990. № 26; 3. С. 96–101.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ГИБРИДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Д.А. Долженкова, А.А. Леваков

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, независимые $(\mathcal{F}_t)$-броуновские движения $W(t)$, $W_1(t)$, функции

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d, \quad g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d,$$
$$h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r, \quad q : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r,$$

которые при каждых фиксированных (x, y) измеримы по Борелю и при каждом фиксированном t непрерывны по (x, y).

Рассмотрим стохастическую гибридную дифференциально-разностную систему

$$dx(t,\omega) = f\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big)dt + g\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big)dW(t,\omega), \tag{1}$$

$$y(t+1,\omega) = h\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big) + q\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big)\big(W_1(t+1,\omega) - W_1(t,\omega)\big) \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x(0,\omega) = \eta(\omega), \quad y(t,\omega) = z(t,\omega), \quad t \in [0,1), \tag{3}$$

где η – d-мерный $(\mathcal{F}_0)$-измеримый случайный вектор, z – r-мерный непрерывный $(\mathcal{F}_0)$-согласованный процесс.

Определение 1. Пару процессов $(x(t,\omega), y(t,\omega))$, определенных на вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{F}, P\big)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, будем называть *решением системы (1)–(2) с заданными начальными условиями (3)*, если:

1) $x(t,\omega)$ – d-мерный непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный случайный процесс;

2) $y(t,\omega)$ – r-мерный кусочно-непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный случайный процесс, который непрерывен на промежутках $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N} \cup 0$;

3) для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ п.н.

$$\int_0^t \Big\| f\big(s, x(s,\omega), y(s,\omega)\big)\Big\| ds < \infty, \quad \int_0^t \Big\| g\big(s, x(s,\omega), y(s,\omega)\big)\Big\|^2 ds < \infty;$$

4) с вероятностью 1 для каждого $t \in \mathbb{R}_+$

$$x(t,\omega) = \eta(\omega) + \int_0^t f\big(s, x(s,\omega), y(t,\omega)\big)ds + \int_0^t g\big(s, x(s,\omega), y(t,\omega)\big)dW(s,\omega), \tag{4}$$

где первый интеграл является интегралом Лебега, а второй – интегралом Ито, и

$$y(t+1,\omega) = h\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big) + q\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big)\big(W_1(t+1) - W_1(t)\big). \tag{5}$$

Определение 2. Будем говорить, что стохастическая гибридная система (1)–(2) с заданными начальными условиями (3) *имеет единственное решение*, если для любых двух решений $\big(x_1(t,\omega), y_1(t,\omega)\big)$ и $\big(x_2(t,\omega), y_2(t,\omega)\big)$ с вероятностью 1 для любого $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место равенство

$$x_1(t,\omega) = x_2(t,\omega), \quad y_1(t,\omega) = y_2(t,\omega). \tag{6}$$

Будем говорить, что функции f и g удовлетворяют условию $A)$, если

$A_1)$ для любых $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\int_0^a \left(\sup_{\|x\| \leqslant b} \big(\|f(t, x(t), y(t))\|\big) + \sup_{\|x\| \leqslant b} \big(\|g(t, x(t), y(t))\|^2\big) \right) dt < \infty;$$

A_2) существует вещественное отображение $k_0(t)$, удовлетворяющее при каждом $a \in \mathbb{R}_+$ условию $\int_0^a k_0(t)dt < \infty$, такое, что при любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$ выполняется неравенство

$$\|f(t,x_1,y) - f(t,x_2,y)\|^2 + \|g(t,x_1,y) - g(t,x_2,y)\|^2 \leq k_0(t)\|x_1 - x_2\|^2\|y\|^2;$$

A_3) существует вещественное отображение $k_1(t)$, удовлетворяющее при каждом $a \in \mathbb{R}_+$ условию $\int_0^a k_1^2(t)\,dt < \infty$ такое, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и любых $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$ выполняется неравенство

$$\|f(t,x,y)\| + \|g(t,x,y)\| \leqslant k_1(t)(1 + \|x\| + \|y\|).$$

Условие A_3) означает, что функции f и g имеют линейный порядок роста по x и по y.

Теорема. *Если отображения f и g удовлетворяют условию A), то для любого $(\mathcal{F}_0)$-измеримого случайного вектора $\eta(\omega)$ и любого непрерывного $(\mathcal{F}_0)$-согласованного случайного процесса $z(t,\omega)$, $t \in [0,1)$, удовлетворяющих условиям*

$$E\big(\|\eta(\omega)\|^2\big) < \infty, \quad E\Big(\int_0^1 \|z(t,\omega)\|^2\,dt\Big) < \infty,$$

система (1)-(2) имеет единственное решение с начальными условиями (3).

Литература

1. Леваков А. А., Васьковский М. М. *Стохастические дифференциальные уравнения и включения.* Минск: БГУ, 2019.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

А.И. Жук, Е.Н. Защук

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0,a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1,p}, \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, – некоторые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), ..., x^p(t)]$, а $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$, – функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$, непрерывны справа, $L^i(0) = L^i(0^-) = 0$ и $L^i(a^-) = L^i(a)$, $i = \overline{1,q}$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1,p}, \tag{2}$$

с начальным условием $x_n(t)|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t)$. Здесь

$$L^j_n(t) = (L^j * \rho^j_n)(t) = \int_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} L^j(t+s)\rho^j_n(s)\,ds,$$

где

$$\rho^j_n(t) = \gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t),$$

$$\gamma^j(n)h_n \to \infty \quad \text{для} \quad j=\overline{1,b}, \quad \gamma^j(n)h_n \to 0 \quad \text{при} \quad j=\overline{b+1,q};$$

$$\rho^j \geqslant 0, \quad \operatorname{supp}\rho^j \subseteq [0,1], \quad \int_0^1 \rho^j(s)\,ds = 1;$$

$$f_n = f * \widetilde{\rho}_n, \quad \widetilde{\rho}_n(x_0,x_1,...,x_p) = n^p\widetilde{\rho}(nx_0,nx_1,...,nx_p), \quad \widetilde{\rho}\in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1}), \quad \widetilde{\rho}\geqslant 0,$$

$$\int_{[0;1]^{p+1}} \widetilde{\rho}(x_0,x_1,...,x_p)\,dx_0dx_1...dx_p = 1, \quad \operatorname{supp}\widetilde{\rho}\subset[0;1]^{p+1}.$$

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x^i_0 + \sum_{j=1}^q \int\limits_0^t f^{ij}(s,x(s))\,dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r\leqslant t} S^i(\mu_r, x(\mu_r^-),\, \Delta L(\mu_r)), \quad i=\overline{1,p}, \qquad (3)$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющая функции $L^j(t)$, μ^j_r, $r=1,2,\ldots$ – точки разрыва функции $L^j(t)$, $\Delta L^j(\mu_r) = L^{jd}(\mu_r^+) - L^{jd}(\mu_r^-)$ – величина скачка, $S^i(\mu,x,u) = \varphi^i(1,\mu,x,u) - \varphi^i(0,\mu,x,u)$, а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t,\mu,x,u) = x^i + \sum_{j=1}^b u^j \int\limits_0^t f^{ij}\big(\mu,\varphi(s^-,\mu,x,u)\big)\,dH(s-1) +$$

$$+ \sum_{j=b+1}^q u^j \int\limits_0^t f^{ij}\big(\mu,\varphi(s,\mu,x,u)\big)\,ds, \quad i=\overline{1,p}, \quad j=\overline{1,q}.$$

Теорема. *Пусть* f^{ij}, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$, *удовлетворяют условию линейного роста и ограничены.* $L^j(t)$, $j=\overline{1,b}$, *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$, $\gamma^j(n)\to\infty$ *так, что для* $j=\overline{1,b}$ *справедливо* $\gamma^j(n)h_n\to\infty$, *и для* $j=\overline{b+1,q}$ *выполняется* $\gamma^j(n)h_n\to 0$, *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (3) в* $L^p(T)$, *если* $\int|x_{n0}(\tau_t) - x_0|^p\,dt \to 0$.

Аналогичная теорема с другими условиями для функций f^{ij} была получена в [1].

Литература

1. Жук А. И., Яблонский О. Л., Спасков С. А. *Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай* // Весцi БДПУ. Сер. 3. Фiзiка, матэматыка, iнфарматыка, бiялогiя. геаграфiя. 2019. № 4. С. 16–22.

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ МАТРИЧНОГО ТИПА С ВАРИАЦИОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М.В. Игнатенко, Л.А. Янович

Теория вариационных производных, их свойств, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с вариационными производными достаточно полно изложена, например, в монографиях [1–3], и имеет многочисленные приложения в статистической физике, квантовой теории поля, гидромеханике и других областях.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение с вариационными производными первого и второго порядков

$$\frac{\delta^2 I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)\delta x\left(t\right)} - A\frac{\delta I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)} + \frac{1}{4}A^2 I\left(x\right) = 0, \tag{1}$$

где $I\left(x\right)$ – искомый матричнозначный оператор, определенный на функциональном пространстве X, например, $C\left(T\right)$ или $L_2\left(T\right)$ $\left(T \in \mathbb{R}\right)$; A – постоянная квадратная матрица.

Теорема. *Интегральный оператор*

$$I\left(x\right) = \exp\int\limits_T \frac{1}{2}Ax\left(t\right)dt \left[C_1 + C_2\int\limits_T x\left(t\right)dt\right], \tag{2}$$

где C_1 и C_2 – произвольные матрицы того же размера, что и A, при условии существования обратной матрицы A^{-1} является решением уравнения (1).

Для доказательства теоремы предварительно вычислим дифференциалы Гато первого порядка $\delta I\left[x;h\right]$ по направлению $h = h\left(t\right)$ и второго порядка $\delta^2 I\left[x;h_1,h_2\right]$ по направлениям $h_1 = h_1\left(t\right)$ и $h_2 = h_2\left(t\right)$ в точке $x = x\left(t\right)$ для оператора $I\left(x\right)$ вида (2). Имеем

$$\delta I\left[x;h\right] = \lim_{\lambda\to 0}\frac{I\left(x+\lambda h\right) - I\left(x\right)}{\lambda} = \left.\frac{dI\left(x+\lambda h\right)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} =$$

$$= \left.\left(\exp\int\limits_T \frac{1}{2}A(x(t)+\lambda h(t))dt\left[C_1 + C_2\int\limits_T (x(t)+\lambda h(t))dt\right]\right)'_\lambda\right|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{1}{2}A\exp\int\limits_T\frac{1}{2}Ax(t)dt\left[C_1 + C_2\int\limits_T x(t)dt\right]\int\limits_T h(s)ds + C_2\exp\int\limits_T\frac{1}{2}Ax(t)dt\int\limits_T h(s)ds;$$

$$\delta^2 I\left[x;h_1,h_2\right] = \left.\frac{\partial^2 I\left(x+\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2\right)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right|_{\lambda_1=\lambda_2=0} =$$

$$= \left.\frac{\partial^2\left(\exp\int_T\frac{1}{2}A(x(t)+\lambda_1 h_1(t)+\lambda_2 h_2(t))dt\left[C_1+C_2\int_T(x(t)+\lambda_1 h_1(t)+\lambda_2 h_2(t))dt\right]\right)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right|_{\lambda_1=\lambda_2=0} =$$

$$= \frac{1}{4}A^2\exp\int\limits_T\frac{1}{2}Ax(t)dt\left[C_1 + C_2\int\limits_T x(t)dt\right]\int\limits_T\int\limits_T h_1(s_1)h_2(s_2)ds_1 ds_2 +$$

$$+AC_2 \exp \int_T \frac{1}{2}Ax(t)dt \int_T \int_T h_1(s_1)h_2(s_2)ds_1ds_2.$$

Далее, с учетом определений

$$\delta I\left[x;h\right] = \int_T \frac{\delta I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)}h(s)ds, \quad \delta^2 I\left[x;h_1,h_2\right] = \int_T \int_T \frac{\delta^2 I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)\delta x\left(t\right)}h_1(s_1)h_2(s_2)ds_1ds_2,$$

получим следующие правила для вычисления вариационных производных $\dfrac{\delta I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)}$, $\dfrac{\delta^2 I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)\delta x\left(t\right)}$ первого и второго порядков соответственно:

$$\frac{\delta I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)} = \frac{1}{2}A \exp \int_T \frac{1}{2}Ax\left(t\right)dt\left(C_1 + C_2\int_T x\left(t\right)dt\right) + C_2 \exp \int_T \frac{1}{2}Ax\left(t\right)dt, \tag{3}$$

$$\frac{\delta^2 I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)\delta x\left(t\right)} = \frac{1}{4}A^2 \exp \int_T \frac{1}{2}Ax\left(t\right)dt\left(C_1 + C_2\int_T x\left(t\right)dt\right) + AC_2 \exp \int_T \frac{1}{2}Ax\left(t\right)dt. \tag{4}$$

Так как левая часть $\dfrac{\delta^2 I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)\delta x\left(t\right)}$ равенства (4) совпадает с разностью

$$\frac{A\delta I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)} - \frac{1}{4}A^2 I\left(x\right),$$

то из системы уравнений (3), (4) при условии существования матрицы A^{-1} имеем

$$I\left(x\right) = \exp \int_T \frac{1}{2}Ax\left(t\right)dt \quad \left[C_1 + C_2\int_T x\left(t\right)dt\right],$$

т.е. интегральный оператор (2) действительно является решением уравнения (1).

Отметим, что точное и приближенное решение отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков, встречающихся в различных прикладных областях и математической физике, предложено в работе [4]. Решение некоторых дифференциальных уравнений с интегральными операторами специального вида и первыми вариационными производными, полученное интерполяционными методами, рассмотрено в статье [5]. Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографиях [6–9].

Литература

1. Смирнов В. И., Крылов В. И., Канторович Л. В. *Вариационное исчисление.* Л.: Кубуч, 1933.

2. Леви П. *Конкретные проблемы функционального анализа.* М.: Наука, 1967.

3. Вайнберг М. М. *Вариационные методы исследования нелинейных операторов.* М.: Гостехиздат, 1956.

4. Игнатенко М. В., Янович Л. А. *О точном и приближенном решении отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 1. С. 51–71.

5. Игнатенко М. В., Янович Л. А. *Функциональное дифференцирование интегральных операторов специального вида и некоторые вопросы обратного интерполирования* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2021. Т. 57. № 4. С. 401–416.

6. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А. *Интерполирование операторов.* Киев: Наук. думка, 2000.

7. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. *Methods of Operator Interpolation.* Праці Ін-ту математики НАН України. 2010. V. 83: Математика та ii застосування. P. 1–517.

8. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Основы теории интерполирования функций матричных переменных.* Минск: Беларус. навука, 2016.

9. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц.* Минск: Беларус. навука, 2020.

ПРИМЕНЕНИЕ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ДРОБНО-ИНТЕГРИРОВАННОГО СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ДЛЯ АНАЛИЗА ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ДЛИННОЙ ПАМЯТЬЮ

С.В. Рогозин, Р.В. Зуёнок, М.В. Дубатовская

В докладе обсуждается применение модели ARFIMA для исследования финансовых временных рядов с длинной памятью. Временные ряды с длинной памятью возникают при анализе валютных рынков, макроэкономических показателей, доходности финансовых активов и изучении других экономических объектов и процессов (см, например, [1-3]). Ряды с длинной памятью характеризуются функцией автокорреляции, которая медленно убывает по мере увеличения временного лага. Для таких рядов существует зависимость между далеко отстоящими друг от друга наблюдениями. Естественно предполагать, что длинная память может быть обнаружена лишь в наблюдениях, относящихся к значительному временному промежутку. С другой стороны моделирование таких временных рядов позволяет строить долгосрочные прогнозы, отличные от прогнозов, полученных на основе ранее существовавших моделей и в большей степени соответствующие исследуемым данным. Понятие длинной памяти занимает промежуточное место между понятиями короткой и бесконечной памяти [1].

Говорят, что стохастический процесс является *процессом с длинной памятью*, если его спектральная плотность удовлетворяет условию

$$f(\lambda) \sim c|\lambda|^{-2d}, \quad \lambda \to 0. \tag{1}$$

Для характеристики процесса X_t с длинной памятью используется следующий показатель

$$d = H - \frac{1}{2}, \tag{2}$$

где H – показатель Херста (см. [1]).

Для рядов с короткой памятью эффект шока не оказывает влияния на их поведение в долгосрочном периоде. Для ряда с бесконечной памятью эффект шока сказывается на всех будущих значениях данного ряда. В промежуточном случае эффект крайне длительный, но не перманентный.

Линейная авторегрессионная дробно-интегрированная модель скользящего среднего $ARFIMA(p,d,q)$ предложена в [2] в качестве обобщения известной авторегрессионной интегрированной модели скользящего среднего $ARIMA(p,q)$ и авторегрессионной модели скользящего среднего $ARMA(p,q)$. В модели $ARIMA(p,q)$ параметр p

характеризует авторегрессионную функцию, а параметр q связан с моделью скользящего среднего. Модель авторегрессии – это расширение случайного блуждания, которое включает прошедшие события. Эта модель линейно зависит от прошедших событий и в основном представляет собой регрессионную модель, в которой предыдущие члены являются предикторами. Модель скользящего среднего аналогична модели авторегрессии, за исключением того, что она представляет собой линейную комбинацию прошлых значений белого шума. Разница между ними заключается в том, что модель $MA(1)$ будет учитывать только последнее резкое изменение данных, а не все предыдущие, которые учитываются моделью $AR(1)$. Модель $ARMA$ представляет собой комбинацию моделей AR и MA с целью улавливать как эффекты участников рынка (эффекты импульса и возврата к среднему), так и характеризовать информацию о шоке (неожиданное событие). Модели AR, MA и $ARMA$ не являются условно гетероскедастичными и не учитывают кластеризацию волатильности.

Приведем формальное определение модели $ARFIMA(p,d,q)$ следуя [4]. Говорят, что процесс X_t является *авторегрессионным порядка p проинтегрированным процессом $I(d)$ порядка d скользящего среднего порядка q*, если имеет место следующее его представление

$$\begin{gathered}(1-L)^d\, y_t = \varepsilon_t, \quad t = 1,\ldots,T,\\ \varphi(L)\,(1-L)^d\, X_t = \theta(L)\eta_t,\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\varphi(L)\varepsilon_t = \Theta(L)\eta_t, \quad \Phi(L)\varepsilon_t = \theta(L)\eta_t, \quad \eta_t \sim N(0,\sigma^2).$$

Здесь L – лаговый оператор обратного сдвига ($LX_t = X_{t-1}$), $\varphi(L), \theta(L)$ – многочлены: $\varphi(L) = 1 - \varphi_1 L - \ldots - \varphi_p L^p$, $\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q$, а процесс ε_t является процессом с короткой памятью, т.е. $I(0)$. Параметр d считается в этом случае дробным числом $d \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Оператор $(1-L)^d$ имеет следующее разложение в ряд (т.е. является обобщенной операторно-значной функцией Миттаг–Леффлера [5])

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} B^j,$$

где $\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ – гамма-функция Эйлера. Автокорреляционная функция такого ряда в случае $d \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ имеет вид

$$\rho_k = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1-d)} \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}, \quad k \to \infty.$$

Таким образом, при $d \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ процесс является стационарным. Если $d = 0$, то процесс имеет короткую память, т.е. по существу это белый шум (модель $ARMA(p,q)$). При $d \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ говорят, что процесс соответствует ряду, обладающему свойством антиперсистентности. При $d \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ процесс является нестационарным. При $d = 1$ процесс X_t – это фактически процесс единичного корня (модель $ARIMA(p,q)$).

В докладе обсуждается применение процессов с длинной памятью для анализа доходности курсов валют. В качестве примера берется исследование курса белорусского рубля относительно доллара США. Использованы ежедневные данные Национального банка Республики Беларусь за период 01.01.2016 – 01.12.2021. Прогноз строился на одной и той же выборке с использованием различных классов моделей, а именно модель “белого шума”, $ARMA(2,8)$ и итоговая модель $ARFIMA(2, 0.18, 8)$. Итоговая модель оказалась наиболее пригодной для прогнозирования, так как ее показатели, хоть и незначительно, но превосходят показатели прогнозной силы модели $ARMA$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ “Конвергенция-2025”, НИР 1.7.01.4.

Литература

1. Перцовский О. Е. *Моделирование валютных рынков на основе процессов с длинной памятью: Препринт WP2/2004/03* // М: ГУ ВШЭ. 2004. № 03.

2. Mandelbrot B., van Ness J. W. *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications* // SIAM Review. 1968. Т. 10. № 4. P. 422–437.

3. Nigmatullin R., Machado J. T. *Method of forecasting of random sequences based on the Prony decomposition analysis of finance/economic data* // Analytic Method of Analysis and Differential Equations (AMADE 2015), S. V. Rogosin, M. V. Dubatovskaya eds. Cambridge Scientific Publishers, 2016. P. 101–126.

4. Щетинин М. Ю. *О методах оценивания длинной памяти финансовых временных рядов* // Математические методы анализа в экономике. 2010. Т. 13. № 37. С. 39–45.

5. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. *Mittag-Leffler Functions: Related Topics and Applications.* 2nd edition. Berlin - New York: Springer, 2020.

О СОВРЕМЕННЫХ РАБОТАХ ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С.М. Ситник, Абдул Ахад Ариан, Ал-Кархи Хаитхам, Абдул Мохаммад Кудоси

В докладе будут изложены некоторые современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Рассматриваются определённые типы дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, основное внимание уделяется дифференциальным уравнениям с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2}{dx^2}u(x) + \frac{\nu}{x}\frac{d}{dx}u(x).$$

В докладе современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям рассматриваются на основе ряда последних публикаций по этой тематике, см. [1–7]. Среди них особо отметим опубликованный в 2020 г. в издательстве Springer в серии *Trends in Mathematics* сборник работ [5] под редакцией В.В. Кравченко и С.М. Ситника по современной теории операторов преобразования, а также организованную В.В. Кравченко в октябре 2020 г. в Кэретаро, Мексика, CINVESTAV, первую специализированную конференцию по теории операторов преобразования [7], получившую сладко звучащее по–русски название TORT (Transmutation Operators and Related Topics). В конференции приняли участие ряд известных математиков.

Таким образом, теория операторов преобразования и их многочисленных приложений является живой и активной ветвью современной математики. Операторам преобразования и их различным применениям посвящено достаточное число публикаций, в том числе издающихся монографий и сборников.

Литература

1. Катрахов В. В., Ситник С. М. *Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64. № 2. С. 211–426.

2. Шишкина Э. Л. *Общее уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и гиперболические B–потенциалы* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65. № 2. С. 157–338.

3. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя.* М.: Физматлит, 2019.

4. Shishkina E. L., Sitnik S. M. *Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. / In the Series: Mathematics in Science and Engineering.* Elsevier, Academic Press, 2020.

5. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. *Transmutation Operators and Applications. / In the Series: Trends in Mathematics.* Springer, Birkhäuser, 2020.

6. Kravchenko V. V. *Forward and Inverse Sturm–Liouville Problems: A Method of Solution.* Springer, 2020.

7. International Workshop on Transmutation Operators and Related Topics — I. Queretaro, Mexico, CINVESTAV. 2019. *https : //www.math.cinvestav.mx/IWTOR.*

НАЧАЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ СИСТЕМНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

И.В. Трифонова

К вопросу описания решения систем интегро-дифференциальных уравнений на протяжении последнего столетия обращались многие исследователи, как физики, так и математики [1-2], а разработка теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений была начата еще А.М. Ляпуновым, Э. Шмидтом, А. Хаммерштейном, Л. Лихтенштейном. Опишем возможности применения теории нелинейных эволюционных операторов второй кратности с обобщенными характеристиками [3] к приближению решения нелинейной динамической системы. Системный оператор A второй кратности определяется как:

$$A(x_1,x_2)=\sum_{n_1,n_2} S_{n_1+n_2}\big(a_{n_1,n_2}*(x_1^{\otimes n_1}\otimes x_2^{\otimes n_2})\big),\quad (x_1,x_2)\in X^2,$$

где X – индуктивный предел семейства пространств X_a бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси, носители которых содержатся на $[a;\infty)$; a_{n_1,n_2} – обобщенная функция с носителем $[0;\infty)^n$; $S_{n_1+n_2}$ – оператор сокращения переменных n-го порядка $(n=n_1+n_2)$; $x_j^{\otimes n_1}$ – тензорная степень n_1-го порядка x_j, $j=1,2$; $*$ – n-мерная свертка обобщенных функций. Численное описание состояния системы строится на комплексных коэффициентах передачи в виде спектральных характеристик нелинейного оператора [4]. Тогда для системы

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t K_1(t-s)x_1(s)\,ds+x_1'(t)+x_1(t)+x_2(t)+x_1^2(t)+x_1(t)x_2(t)+x_2^2(t)=f_1(t),\\ \displaystyle\int_0^t K_2(t-s)x_1(s)\,ds+x_2'(t)+x_1(t)+x_2(t)+x_1^2(t)+x_1(t)x_2(t)+x_2^2(t)=f_2(t), \end{cases}$$

где f_1,f_2 – обобщенные функции с носителем на замкнутой положительной полуоси, начальные импульсные характеристики системного оператора представляются в следующем виде:

$$A_1(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} a^1_{1,0} = K_1 + \delta' + \delta & a^1_{0,1} = \delta \\ a^2_{1,0} = \delta & a^2_{0,1} = K_2 + \delta' + \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$A_2(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} a^1_{2,0} = K_{11} + \delta^{\otimes 2} & a^1_{1,1} = \delta^{\otimes 2} & a^1_{0,2} = \delta^{\otimes 2} \\ a^2_{2,0} = \delta^{\otimes 2} & a^2_{1,1} = \delta^{\otimes 2} & a^2_{0,2} = K_{22} + \delta^{\otimes 2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1^{\otimes 2} \\ x_1 \otimes x_2 \\ x_2^{\otimes 2} \end{pmatrix},$$

$$A_k = 0 \quad \forall k \geqslant 3,$$

где δ – дельта-функция Дирака, δ' – обобщенная производная дельта-функции.

На основании теоремы о композиции системных эволюционных операторов второй кратности, после применения обобщенного преобразования Лапласа, получим матрицы обобщенных спектральных характеристик $(\tilde{a}_{n,m})$ операторных компонент системного оператора A

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1(\lambda) + \lambda + 1 & 1 \\ 1 & \tilde{K}_2(\lambda) + \lambda + 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_k = 0 \quad \forall k \geqslant 3.$$

Найдем обратную матрицу к $\tilde{A}_1$. Строим начальные компоненты асимптотически обратного системного оператора B к оператору A, которые обозначим B_1 и B_2.

$$\Delta = (\tilde{K}_1(\lambda) + \lambda + 1)(\tilde{K}_2(\lambda) + \lambda + 1) - 1 =$$

$$= \tilde{K}_1\tilde{K}_2 + \lambda\tilde{K}_1(\lambda) + \lambda\tilde{K}_2(\lambda) + \tilde{K}_1(\lambda) + \tilde{K}_2(\lambda) + \lambda^2 + \lambda,$$

$$\tilde{B}_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \tilde{K}_2(\lambda) + \lambda + 1 & -1 \\ -1 & \tilde{K}_1(\lambda) + \lambda + 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \tilde{B}_2(\tilde{B}_1, \tilde{B}_1).$$

На основании обратного преобразования Лапласа, применяемого к построенной матрице, выполняется построение матриц импульсных характеристик начальных компонент асимптотически обратного системного оператора B. Рекурсивный алгоритм позволяет описать системный оператор B.

Литература

1. Вайнберг М. М. *Интегро-дифференциальные уравнения.* Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регулир. 1962, 1964. С. 5–372.

2. Васильев В. В. *К вопросу о решении систем линейных интегро-дифференциальных уравнений.* Иркутск: Труды ун-та, № 4953, 8:1. С. 3–8.

3. Вувуникян Ю. М., Трифонова И. В. *Эволюционный оператор второй степени кратности, порожденный системой интегро-дифференциальных уравнений* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та ім. Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. № 3(10). С. 50–60.

4. Вувуникян Ю. М. *Методы построения импульсных и спектральных характеристик системных операторов, порожденных нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями* // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2021. С. 221–226.

О ТОЧНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.П. Шилин

Продолжено исследование уравнения

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\varphi^{(k)}(t)+\frac{k!b_k}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}}\right)=f(t),\quad t\in L, \tag{1}$$

с интегралами, понимаемыми в смысле конечной части по Адамару. В этом уравнении L – простая гладкая замкнутая кривая на комплексной плоскости, $f(t)$ – H-непрерывная (т.е. удовлетворяющая условию Гельдера) заданная функция, $\varphi(t)$ – искомая функция, H-непрерывная вместе со своими входящими в уравнение производными, $n\in\mathbb{N}$. В случае постоянных коэффициентов a_k, b_k точное аналитическое решение уравнения (1) дано в [1]. В [2] указан способ исследования уравнения (1) с переменными коэффициентами вида

$$a_k=a(t)A_k(t)+b(t)B_k(t),\quad b_k=a(t)A_k(t)-b(t)B_k(t),\quad k=\overline{0,n},$$

где $a(t)$, $b(t)$ – H-непрерывные функции. При подходящем подборе функций $A_k(t)$, $B_k(t)$ возможность точного аналитического решения уравнения сохраняется. Указаны два новых таких случая.

1.

$$A_k(t)=\sum_{s=2k}^{n+k}a_{s-k,k}c_{n+k-s}t^s,\quad B_k(t)=\sum_{s=2k}^{n+k}a_{s-k,k}d_{n+k-s}t^s,$$

где c_j, d_j – заданные комплексные числа, $j=\overline{0,n}$; a_{jm} – заданные целые числа, причем

$$c_0=d_0=1,\quad a_{jj}=(-1)^j,\ a_{j0}=0,\quad j=\overline{0,n};$$

$$a_{jm}=(1-j-m)a_{j-1,m}-a_{j-1,m-1},\quad j=\overline{2,n},\quad m=\overline{1,j-1};$$

2.

$$A_k(t)=(E_k-\alpha E_{k+1})\,t-E_{k+1},\quad B_k(t)=(F_k-\beta F_{k+1})\,t-F_{k+1},$$

где α, β, E_k, F_k, $k=\overline{0,n+1}$, – заданные комплексные числа, причем

$$E_0=F_0=E_{n+1}=F_{n+1}=0,\quad E_n=F_n=1,$$

корни уравнений $\sum\limits_{k=0}^{n-1}E_{k+1}\lambda^k=0$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}F_{k+1}\lambda^k=0$ однократны,

$$\sum_{k=0}^{n-1}E_{k+1}\alpha^k\neq 0,\quad \sum_{k=0}^{n-1}F_{k+1}\beta^k\neq 0,\quad n\geqslant 2.$$

В указанных случаях проведен полный конструктивный анализ уравнения (1), решены в явном виде примеры. Решение основано на использовании обобщенных формул Сохоцкого, сводящих уравнение к краевой задаче Римана в некотором классе функций. После решения задачи Римана следует еще решать в областях комплексной плоскости линейные дифференциальные уравнения для аналитических функций с дополнительными условиями. Частично результаты содержатся в [3].

Литература

1. Зверович Э. И. *Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54. № 6. С. 5–8.
2. Шилин А. П. *Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 48–56.
3. Шилин А. П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с рекуррентными соотношениями в коэффициентах* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2022. № 2. (в печати).

ON SPECTRAL PROBLEM FOR MHD EQUATION

M.P. Dymkov, V.M. Dymkou

We are interesting the equations that govern for the simplest cases the liquid metal flow magnetohydrodynamics that, in particular, can be used in the nuclear fusion reactor.

We consider the case of a spacially periodic, incompressible, conducting fluid in a $3\,D$ cubic box Ω of size $L = L_{\text{box}}$ under imposed homogeneous and steady magnetic field B_0 aligned with the vertical direction e_z. The governing equations can be reduced to a single one involving the velocity and pressure only (see [1,2]) as follows

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = \nabla^2 u - Ha^2\nabla^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Grf(x,t), \quad \nabla\cdot u = 0,$$

where following notations are used $u(x,t)$ is the velocity-vector of the flow, $f(x,t)$ is the external forcing, $x=(x,y,x)$ is the spatial variable, t is time, $Ha = L_{\text{ref}}B_0\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho\nu}}$ is the Hartmann number and $Gr = \dfrac{L_{\text{ref}}^{3-d/2}}{\nu^2}||f||$ is the Grashoff number (d is number of spatial dimensions), ρ is the density, p is the pressure, ν is the viscosity, σ is the electrical conductivity, B_0 is the imposed magnetic field, $Re = \frac{UL_{\text{int}}}{\nu}$ is Reynolds number. The addition of periodic boundary conditions and zero initial condition $u(x,0)=0$ completely determine the problem.

In order to rewrite the considered problem in the abstract form as an initial boundary value problem and identify the operator relevant to the problem, we first need to identify the functional spaces where the solution of our problem are to be sought.

Following [3], let $H^m(\Omega)$ be the Sobolev space of functions from $L_2(\Omega)$ whose derivatives of order up to m belong to $L_2(\Omega)$. $\big(H^m(\Omega)\big)^3$ is the space of three-dimensional vector fields with components from $H^m(\Omega)$. By $L_p(\Omega;\mathcal{B})$, $1\leqslant p<\infty$, we denote the set of functions v defined on the domain $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ with images in the given Banach space $\mathcal{B}$, for which the norm $||v||_{L_p(\Omega;\mathcal{B})} = \left(\int\limits_\Omega ||v||_{\mathcal{B}}^p dE\right)^{1/p}$ is finite. Then, define the needed spaces V, V^0, V^1 and V^2 as follows:

$$V = \big\{v(x)\in\big(H^1(\Omega)\big)^3 : \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \Omega,\ v \text{ satisfies the boundary conditions on } \partial\Omega\big\},$$

$$V^0 \text{ is the closure of } V \text{ in } \big(L_2(\Omega)\big)^3, \quad V^1 \text{ is the closure of } V \text{ in } \big(H^1(\Omega)\big)^3,$$

$$V^2 = V^1\cap\big(H^2(\Omega)\big)^3.$$

Then, assuming $f(\cdot) \in L_2(0,T;\, V^0)$ and $u_0 \in V^1$ and using the Helmholtz-Leray decomposition of vector field u (see [3]), we obtain the following Cauchy problem for the considered function u:

$$\dot{u}(t) = Lu + B(u) + f(t), \quad u(t)\big|_{t=0} = u_0,$$

where $u(t) = u(\cdot,t)$ and $u(\cdot) \in \big\{L_2(0,T;\, V^2) : \dot{u}(t) \in L_2(0,T;\, V^0)\big\}$, $f(t) = f(\cdot,t)$ and the operators L and B are defined as:

$$Lu = \frac{1}{Re}\mathcal{P}\Big(\nabla^2 u - Ha^2\nabla^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) \quad \forall u \in D(L),$$

$$B(u) = \mathcal{P}(u\cdot\nabla)u \quad \forall u \in D(L),$$

where $D(L) = D(B) = V \cap \big(H^2(\Omega)\big)^3$ and $\mathcal{P}$ denotes the Leray projector $\mathcal{P}\colon (L_2(\Omega))^3 \to V^0$.

The principle of spectral methods consists in looking for a solution for the physical variables (here the space x and time t dependent velocity field $u(x,t)$ and pressure $p(x,t)$) under the form of a finite expansion over a basis of functions (e_n), $1 \leqslant n \leqslant N$, that spans the space of solutions of the PDE. The novelty is that instead of using bases like the usual Chebyshev polynomials, that are easy to implement but incur heavy computational costs in order to resolve the problem, we use a basis obtained from the eigenvalue problem of the linear part of the governing equations. This method used in [4] and shown their efficiency and minimal computational costs for numerical solutions in realistic experiments.

Finally, the problem associated with the liquid metal flow magnetohydrodynamics is to study in the relevant function spaces the dissipation operator of the form

$$D_{Ha} = \left(\triangle - Ha^2\triangle^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \quad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

We shall first solve the eigenvalue problem for this operator

$$D_{Ha}f = \lambda f, \quad \left(\triangle - Ha^2\triangle^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f = \lambda f,$$

that is equivalent to the eigenvalue problem

$$\left(\triangle^2 - Ha^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f = \lambda\triangle f$$

with periodic conditions in x, y directions and walls in $z = \pm 1$, and where

$$\triangle^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2}.$$

The last equation for some cases can be rewritten as follows

$$Z^{(4)}_{zzzz} - 2\left[k_\perp^2 + \frac{1}{2}(Ha^2+\lambda)\right]Z^{(2)}_{zz} + \left[k_\perp^4 + \lambda k_\perp^2\right]Z = 0.$$

where $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Hence, the characteristic equation for the corresponding eigenvalues is

$$\mu^4 - 2\left[k_\perp^2 + \frac{1}{2}(Ha^2+\lambda)\right]\mu^2 + \left[k_\perp^4 + \lambda k_\perp^2\right] = 0.$$

The proper study of these roots gives an ability to calculate the needed eigenfunctions. This problem is investigated in the given paper.

Refrences

1. Roberts P. H. *Introduction to Magnetohydrodynamics.* Longsmans, London, 1967
2. Sommeria J., Moreau R. *Why, how and when, MHD turbulence becomes two-dimensional* // J. Fluid Mech. 2003. № 118. P. 507–518.
3. Foias C., Manley O., Rosa R., Temam R. *Navier-Stokes Equations and Turbulence.* Cambridge University Press, 2001.
4. Dymkou V., Potherat A. *Spectral method based on the least dissipative modes for wall bounded MHD flows* // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2009. № 23. P. 535. https://doi.org/10.1007/s00162-009-0159-9

MULTI-DIMENSIONAL GENERAL INTEGRAL TRANSFORMATION WITH SPECIAL FUNCTIONS IN THE WEIGHTED SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS

S.M. Sitnik, O.V. Skoromnik, S.A. Shlapakov

Multidimensional integral transform

$$\big(\mathrm{K}f\big)(\mathbf{x}) = \overline{h}\mathbf{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\, \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{k}[\mathbf{x}\mathbf{t}] f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0) \tag{1}$$

is studied. Here (see, for example, [1] Section 28.4; [2], ch. 1; [3], [4])

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$\mathbb{R}^n$ be the n-dimensional Euclidean space; $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t} = \sum\limits_{n=1}^{n} x_n t_n$ denotes their scalar product; in particular, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{1} = \sum\limits_{n=1}^{n} x_n$ for $\mathbf{1}=$ (1,1,...,1). The expression $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ means that

$$x_1 > t_1, \quad x_2 > t_2, \quad ..., \quad x_n > t_n,$$

the nonstrict inequality $\geqslant$ has similar meaning;

$$\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty} = \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \cdots \int\limits_{0}^{\infty};$$

by $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ we denote the set of positive integers,

$$\mathrm{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathrm{N}_0^n = \mathrm{N}_0 \times \mathrm{N}_0 \times ... \times \mathrm{N}_0.$$

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathrm{N}_0^n = \mathrm{N}_0 \times ... \times \mathrm{N}_0 \ \ (k_i \in \mathrm{N}_0, \ \ i = 1, 2, ..., n)$$

is a multi-index with $\mathbf{k}! = k_1! \cdots k_n!$ and $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + ... + k_n$.

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{x} > 0\};$$

for $l = (l_1, l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}^n_+$

$$\mathbf{D}^l = \frac{\partial^{|l|}}{(\partial x_1)^{l_1} \cdots (\partial x_n)^{l_n}}; \qquad \mathbf{dt} = dt_1 \cdot dt_2 \cdots dt_n;$$

$$\mathbf{t}^l = t^{l_1} t^{l_2} \cdots t^{l_n}; \quad f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, ..., t_n).$$

Let $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ be the n-dimensional space of n complex numbers

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (z_j \in \mathbb{C},\ j = 1, 2, \cdots, n).$$

$$\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n; \quad \overline{h} = (h_1, h_2, ..., h_n), \quad h_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad j = 1, 2, ..., n;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \frac{d}{dx_1 \cdot dx_2 \cdots dx_n}.$$

We introduce the function in the kernel $\mathrm{k}[\mathbf{xt}] = \mathrm{k}[x_1 t_1] \cdot \mathrm{k}[x_2 t_2] \cdots \mathrm{k}[x_n t_n]$, which is the product of some one type special functions.

Our paper is devoted to the study of tranform (1) $\mathrm{K}f$ in the weighted spaces $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{r}}$ summabe functions $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ on

$$\mathbb{R}^{\mathbf{n}}_{+} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ ...,\ x_n > 0\},$$

such that

$$\|f\|_{\overline{\nu}, \overline{r}} = \Bigg\{ \int\limits_{R^1_+} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \Big\{ \cdots \big\{ \int\limits_{R^1_+} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1}$$

$$\times \Big[\int\limits_{R^1_+} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, ..., x_n)|^{r_1} dx_1 \Big]^{r_2/r_1} dx_2 \Big\}^{r_3/r_2} \cdots \Big\}^{r_n/r_{n-1}} dx_n \Bigg\}^{1/r_n} < \infty \tag{2}$$

$\big(\overline{r} = (r_1, r_2, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leqslant \overline{r} < \infty,\ \overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in \mathbb{R}^n,\ \nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n\big)$.

The functional and compositional properties of the integral transformation (1) in spaces $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ $\big(\overline{2} = (2, 2, ..., 2),\ \overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in \mathbb{R}^n,\ \nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n\big)$ were studied in [3]. We continue this research. The scheme of study is similar to the process of constructing the theory of the H-transformation, in which the central place is given to the questions of bounded and one-to-one action of the corresponding integral operator in spaces of integrable functions with weight concentrated at zero and at infinity. Theory of the considered integral transformation (1) in weighted spaces $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{r}}$ of summable functions is constructed. Mapping properties such as the boundedness, the range, the representation and the inversion of the considered transform (1) in the weighted space (2) are established.

Refrences

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* London: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations.* Amsterdam: Elsevier Science, 2006.

3. Sitnik S. M, Skoromnik O. V., Shlapakov S. A. *Multidimensional general integral transformation with special functions in the kernel* // Bulletin of the Vitebsk State university. 2019. № 3(104). P. 18–27.

4. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. *One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman–Erdelyi type with Legendre Functions in kernels* // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. 2020. P. 293–319.

MULTI-DIMENSIONAL MODIFIED G-TRANSFORMATIONS AND THEIR SPECIAL CASES

O.V. Skoromnik, M.V. Papkovich

Three multidimensional integral transforms

$$\left(\mathrm{G}^{1}_{\sigma,\kappa}f\right)(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\sigma}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}}\mathrm{G}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\left|\begin{array}{c}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{array}\right.\right]\mathbf{t}^{\kappa}f(\mathbf{t})\,\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}}\quad(\mathbf{x}>0);\tag{1}$$

$$\left(\mathrm{G}^{1}_{\sigma,\kappa;\,\delta}f\right)(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\sigma}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}}\mathrm{G}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\left[\frac{\mathbf{x}^{\delta}}{\mathbf{t}^{\delta}}\left|\begin{array}{c}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{array}\right.\right]\mathbf{t}^{\kappa}f(\mathbf{t})\,\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}}\quad(\mathbf{x}>0);\tag{2}$$

$$\left({}_{1}\mathrm{I}_{\sigma,\,\omega;\,\zeta}f\right)(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\sigma}\int\limits_{0}^{\mathbf{x}}\frac{\left(\mathbf{x}^{\zeta}-\mathbf{t}^{\zeta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_{2}\mathrm{F}_{1}\left(a,b;c;1-\frac{\mathbf{x}^{\zeta}}{\mathbf{t}^{\zeta}}\right)\mathbf{t}^{\omega}f(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}\quad(\mathbf{x}>\mathbf{0})\tag{3}$$

are studied. Here (see, for example, [1], [2] Section 28.4; [3], ch. 1; [4]; [5])

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \mathbf{t}=(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$\mathbb{R}^n \text{ – Euclidean } n\text{-space},\quad \mathbb{N}=\{1,2,...\},\quad \mathrm{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\},\quad \mathrm{N}_0^n=\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0\times...\times\mathrm{N}_0;$$

$$\mathbf{m}=(m_1,m_2,...,m_n)\in\mathrm{N}_0^n\quad\text{and}\quad m_1=m_2=...=m_n;$$

$$\mathbf{n}=(\overline{n}_1,\overline{n}_2,...,\overline{n}_n)\in\mathrm{N}_0^n\quad\text{and}\quad \overline{n}_1=\overline{n}_2=...=\overline{n}_n;$$

$$\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_n)\in\mathrm{N}_0\quad\text{and}\quad p_1=p_2=...=p_n;$$

$$\mathbf{q}=(q_1,q_2,...,q_n)\in\mathrm{N}_0^n\quad\text{and}\quad q_1=q_2=...=q_n\quad(0\leqslant\mathbf{m}\leqslant\mathbf{q},\quad 0\leqslant\mathbf{n}\leqslant\mathbf{p});$$

$$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\in\mathbb{C}^n;\quad \kappa=(\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n)\in\mathbb{C}^n;$$

the function

$$\mathrm{G}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\left[\mathbf{z}\left|\begin{array}{c}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{array}\right.\right]=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{G}^{m_k,\overline{n}_k}_{p_k,q_k}\left[z_k\left|\begin{array}{c}(a_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k})_{1,q_k}\end{array}\right.\right]$$

is the product of the G-functions $\mathrm{G}^{m_k,\overline{n}_k}_{p_k,q_k}[z_k]$ $(k=1,2,...n)$ [6];

$$a=(a_1,a_2,\dots,a_n),\ b=(b_1,b_2,\dots,b_n),\ c=(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n,\ 0<c_j<1,\ j=\overline{1,n};$$

$$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\in\mathbb{R}^n;\quad \omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)\in\mathbb{R}^n;\quad \zeta=(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n)\in\mathbb{R}^n_+;$$

$$(\mathbf{x}^{\zeta}-\mathbf{t}^{\zeta})^{c-1}=\prod_{j=1}^{n}(x_j^{\zeta_1}-t_j^{\zeta_1})^{c_j-1};\qquad \int\limits_{0}^{\mathbf{x}}=\int\limits_{0}^{x_1}\int\limits_{0}^{x_2}\cdots\int\limits_{0}^{x_n};$$

the expression $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{t}$ means $x_1\geqslant t_1,\ x_2\geqslant t_2,\ \dots,\ x_n\geqslant t_n$; $d\mathbf{t}=dt_1\cdot dt_2\cdots dt_n$; $F\,(a,b;c;\mathbf{z})$ is a function of the form [7]:

$$F\,(a,b;c;\mathbf{z})=\prod_{j=1}^{n}{}_{2}F_{1}\,(a_j,b_j;c_j;z_j),$$

${}_2F_1\,(a_j,b_j;c_j;z_j)$ $(j=1,2,...,n)$ are the Gauss hypergeometric functions.

Our report is devoted to the study of tranforms (1)–(3) in the weighted spaces $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ summabe functions $f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ on $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}_{+}=\{\mathbf{x}:\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid x_1>0,x_2>0,\ldots,x_n>0\}$, such that

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}}=\Bigg\{\int\limits_{\mathbb{R}^1_+} x_n^{\nu_n\cdot r_n-1}\Big\{\cdots\big\{\int\limits_{\mathbb{R}^1_+} x_2^{\nu_2\cdot r_2-1}\times$$

$$\times\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^1_+} x_1^{\nu_1\cdot r_1-1}|f(x_1,...,x_n)|^{r_1}dx_1\Big]^{r_2/r_1}dx_2\big\}^{r_3/r_2}\cdots\Big\}^{r_n/r_{n-1}}dx_n\Bigg\}^{1/r_n}<\infty \tag{4}$$

$\big(\overline{r}=(r_1,r_2,...,r_n)\in\mathbb{R}^n,\ 1\leqslant\overline{r}<\infty,\ \overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{R}^n,\ \nu_1=\nu_2=\ldots=\nu_n\big)$.

The functional properties of the integral transformations (1)–(3) in spaces $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ $\big(\overline{2}=(2,2,\ldots,2),\ \overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{R}^n,\ \nu_1=\nu_2=\ldots=\nu_n\big)$ were studied in [8]. We continue this research. Constructed the $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$-theory of three multidimensional integral transformations (1)–(3) with special functions in the kernels: the G-function and the Gauss hypergeometric function. Conditions are obtained for the q and one-to-oneness of the operators of such transformations from one spaces (4) of integrable functions $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ to others, and analogs of the formula for integration by parts are proved. For the transformations under consideration, various integral representations are established and inversion formulas are derived.

Refrences

1. Brychkov Y. A., Glaeske H. J., Prudnikov A. P., Tuan V. K. *Multidimensional Integral Transformations.* Philadelphia: Gordon and Breach, 1992.
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* London: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
3. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations.* Amsterdam: Elsevier Science, 2006.
4. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Shlapakov S. A. *Multidimensional general integral transformation with special functions in the kernel* // Bulletin of the Vitebsk State university. 2019. № 3(104). P. 18–27.
5. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. *One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman–Erdelyi type with Legendre Functions in kernels* // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. 2020. P. 293–319.
6. Kilbas A. A., Saigo M. *H− Transforms. Theory and Applications.* Boca Raton, Florida: Chapman and Hall. 2004.
7. Skoromnik O. V. *Integral transforms with Gauss and Legendre functions as kernels and integral equations of the first kind.* Novopolotsk: Polotsk State University, 2019.
8. Papkovich M. V., Skoromnik O. V. *Multi-dimensional modified G-transformations and integral transformations with hypergeometric Gauss functions in kernels in weight spaces of summed functions* // Bulletin of the Vitebsk State university. 2022. № 1(114). P. 5–20.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ РЕАКТОРА С НЕОДНОРОДНЫМ КИПЯЩИМ СЛОЕМ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

А. Абдурахимов, Д.К. Холиков

Исследуется влияние продольного и поперечного перемешивания на стационарный режим работы химического реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем, модель которого для однородного случая была рассмотрена в [1]. Для предложенной модели доказывается существование, по крайней мере, одного стационарного режима при заданном наборе параметров системы. Анализируется влияние интенсивности массо- и теплообмена между фазами, степени неоднородности и других гидродинамических параметров на стационарный режим работы реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем.

Химические процессы с интенсивным тепловыделением в реакторах с псевдоожиженным слоем осуществляются при интенсивном теплоотводе от стенок реактора, при этом влияние поперечного перемешивания на стационарный режим может сказаться весьма существенным. Экспериментальные данные [2] свидетельствуют об увеличении поперечной неравномерности профиля температуры как с ростом диаметра аппарата, так и с ростом размера каталитических частиц в системе. Аналитическое решение задачи в изотермическом и неизотермическом случаях для линейного и нелинейного профилей скорости (с учетом продольной диффузии и без нее) получены в [2].

Численные исследования стационарных состояний проточного реактора с продольным и поперечным градиентами температуры показали [3], что в однородном слое влияние поперечного на стационарные режимы в большинстве случаев более значительно, чем продольного. В этих работах структура слоя считалась однородной.

Ниже рассматривается влияние поперечного и продольного перемешивания на стационарный режим работы реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем для одностадийной реакции. Учитывается градиент температуры в плотной фазе и предполагается, что вещество переносится в режиме идеального вытеснения. Перенос тепла и вещества в разбавленной фазе также происходит в режиме идеального вытеснения. Принимается, что скорость химической реакции в плотной фазе подчиняется закону Аррениуса и имеет первый порядок.

В этих предложениях уравнения и граничные условия массо и теплопереноса в реакторе с неоднородным псевдоожиженным слоем (в безразмерной форме) имеют следующий вид:

– для плотной фазы:

$$U_1\frac{\partial Z_1}{\partial x} = (1 - Z_1)\, g e^{-\frac{\beta}{T_1}} - A\,(Z_1 - Z_2), \tag{1}$$

$$\frac{1}{2P_e}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial T_1}{\partial x}\Big) = U_1(T_1 - T_0'') + g e^{-\frac{\beta}{T_1}} \int\limits_0^1 (1 - Z_1)\, dx - \frac{B}{W}(T_1 - \int\limits_0^1 T_2\, dx); \tag{2}$$

– для разбавленной фазы:

$$U_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x} = A\,(Z_1 - Z_2), \tag{3}$$

$$U_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = B\,(T_1 - T_2). \tag{4}$$

Граничные условия:

$$x = 0, \quad Z_1 = Z_2 = 0, \quad T_1 = T_{01}(r), \quad T_2 = T_0^{''}, \tag{5}$$

$$r = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} = 0,$$

$$r = 1; \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} + B_i(T_1 - T^{'}) = 0. \tag{6}$$

Здесь используются обозначения принятые в работе [2].

Решая уравнения (1)–(4) с учетом граничных условий (5), (6), получаем стационарное продольное изменение степени продвижения реакции плотной и разбавленной фазы.

Расчеты также показали, что при изменении значений интенсивности массообмена между фазами скорости потока и степенью неоднородности потока значение $\gamma(T)$ остается в промежутке [0,1]. Таким образом, вышеизложенный анализ показывает, что при изменении допустимых значений гидродинамических параметров, значения функций всегда остаются в промежутке $0 \leqslant \gamma(T) < 1$.

Литература

1. Гупало Ю. П., Острик В. М. *О стационарных режимах работы химических реакторов с продольным и поперечным перемешиванием* // ПММ. 1983. Т. 47. В. 1. С. 73.

2. Абдурахимов А., Холиков Д. *Исследование области существования реактора стационарных режимов* // Проблемы механики. 2020. № 2. С. 27–31.

3. Lie Gowin C. R., Perlmutter D. D. *Tubular reactor steady state and stability characteristics. III. Effect of recycle* // AJChE J. 1971. V. 17. P. 842.

МЕТОД ОЗР И МЕТОД ОМФ В УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

И.Е. Андрушкевич

Особую популярность при построении аналитических решений нелинейных уравнений математической физики имеет метод обратной задачи рассеяния (ОЗР). При использовании метода ОЗР «*. . . уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) интегрируется с помощью перехода от потенциала одномерного уравнения Шредингера к коэффициенту отражения на этом потенциале; при эволюции потенциала в силу КдФ зависимость коэффициента отражения от времени оказывается тривиальной и . . . задача интегрирования КдФ приводит к задаче о восстановлении потенциала по данному коэффициенту отражения – обратной задаче квантовой теории рассеяния. . .*» [1, с. 21].

Технология применения метода ОЗР к настоящему времени отработана в мельчайших подробностях. Единственной преградой на пути его универсальности, на наш взгляд, является отсутствие общих методов построения «пары Лакса» – пары линейных операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}$ таких, что выражение

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{A},\mathbf{L}\right]=\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t}+\mathbf{AL}-\mathbf{LA}=0$$

совпадает с исследуемым эволюционным уравнением.

Успех метода ОЗР на определенное время затмил сильные стороны других подходов, в частности, методов разделения переменных.

Классический метод Фурье разделения переменных (КМФ) Р. Курант относил к специальным методам, и считал его «*... самым важным из этих методов...*» (см., например, [2, с. 30]). Суть КМФ заключается в том, что решение дифференциального уравнения в частных производных ищется как суперпозиция частных решений, представимых в виде произведения функции от пространственной переменной на функцию от времени. В отличие от КМФ, обобщенный метод Фурье (ОМФ) [3], рассматривая дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$\mathbf{D}(u(x,t))=F(x,t), \tag{1}$$

где $\mathbf{D}$ – дифференциальный оператор, $u(x,t)$ – неизвестная функция, $F(x,t)$ – неоднородность, M, K – натуральные числа, исходит из того, что справедливо представление

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{M}\chi_i(x)\tau_i(t), F(x,t)=\sum_{i=1}^{K}X_i(x)T_i(t), \tag{2}$$

и уравнение (1) сводится к билинейному функциональному (БФУ)

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\left(x\right)\psi_i\left(t\right)=0. \tag{3}$$

Основы теории построения решений БФУ сформулированы в [3]; ее применение позволяет сопоставлять уравнению в частных производных (1) наборы систем обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируя которые можно получить частные решения исходного уравнения.

Поскольку метод ОЗР изначально был разработан и успешно применен для уравнения Кортевега–де Фриза, применим ОМФ и мы к этому уравнению.

Уравнение Кортевега–де Фриза в канонической форме имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-6u\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{4}$$

Известны его одно- и двухсолитонные решения (5), (7):

$$u(x,t)=\frac{-\vartheta^2}{2\cosh^2\left\{\dfrac{1}{2}\left(\vartheta x-\vartheta^3 t-c_1\right)\right\}}; \tag{5}$$

$$u(x,t)=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln v(x,t), \tag{6}$$

$$v(x,t)=1+c_1e^{-\vartheta_1 x+\vartheta_1^3 t}+c_2e^{-\vartheta_2 x+\vartheta_2^3 t}+c_1c_2\left(\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}\right)^2e^{-(\vartheta_1+\vartheta_2)x+\left(\vartheta_1^3+\vartheta_2^3\right)t}, \tag{7}$$

где ϑ, ϑ_1, ϑ_2, c_1, c_2 – постоянные. Оба решения получены методом ОЗР и считаются единственными в своем роде.

ОМФ позволил нам получить следующие новые односолитонные решения:

$$u(x,t) = \frac{-4c_3\vartheta^4}{4c_3\vartheta^2 - e^{\vartheta x - \vartheta^3 t - c_1} - 4c_3^2\vartheta^4 e^{-\vartheta x + \vartheta^3 t + c_1}}, \tag{8}$$

$$u(x,t) = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\ \vartheta^2}{2 + \frac{\exp\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\vartheta x - \vartheta^3 - c_1}{c_3\left(1+i\sqrt{3}\right)\vartheta^2} + c_3\left(1+i\sqrt{3}\right)\vartheta^2 \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\vartheta x + \vartheta^3 + c_1\right)}. \tag{9}$$

При выборе значения постоянной $c_3 = -\left(2\vartheta^2\right)^{-1}$ решение (8) совпадает с хорошо известным солитонным решением (5). Помимо известного двухсолитонного решения (7), с помощью ОМФ нам удается получить и ряд новых:

$$v(x,t) = 1 + c_1 e^{-\vartheta_1 x + \vartheta_1^3 t} + c_2 e^{\vartheta_2\left(1+i\sqrt{3}\right)/2\cdot x + \vartheta_2^3 t} +$$

$$+c_1c_2\left(\frac{2\vartheta_1 + \vartheta_2(1+i\sqrt{3})}{2\vartheta_1 - \vartheta_2(1+i\sqrt{3})}\right)^2 e^{\left(-\vartheta_1 + \vartheta_2(1+i\sqrt{3})/2\right)x + \left(\vartheta_1^3 + \vartheta_2^3\right)\ t}, \tag{10}$$

$$v(x,t) = 1 + c_1 e^{\vartheta_1\left(1+i\sqrt{3}\right)x/2 + \vartheta_1^3 t} +$$

$$+c_2 e^{\vartheta_2\left(1+i\sqrt{3}\right)x/2 + \vartheta_2^3 t} + c_1c_2\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}\right)^2 e^{(\vartheta_1+\vartheta_2)\left(1+i\sqrt{3}\right)x/2 + \left(\vartheta_1^3+\vartheta_2^3\right)t}, \tag{11}$$

$$v(x,t) = 1 + c_1 e^{\vartheta_1\left(1+i\sqrt{3}\right)x/2 + \vartheta_1^3 t} + c_2 e^{\vartheta_2\left(1-i\sqrt{3}\right)x/2 + \vartheta_2^3 t} +$$

$$+c_1c_2\left(\frac{\vartheta_1(1+i\sqrt{3}) - \vartheta_2(1-i\sqrt{3})}{\vartheta_1(1+i\sqrt{3}) + \vartheta_2(1-i\sqrt{3})}\right)^2 e^{\left(\vartheta_1\left(1+i\sqrt{3}\right)/2 + \vartheta_2\left(1-i\sqrt{3}\right)/2\right)x + \left(\vartheta_1^3+\vartheta_2^3\right)t}. \tag{12}$$

В заключение заметим, что ОМФ позволяет нам строить как все известные решения КДФ, полученные методом ОЗР, так и ряд принципиально новых.

Литература

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов: метод обратной задачи.* М.: Наука, 1980.

2. Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики. Т. 2. Уравнения с частными производными. Перевод с английского Т.Д. Вентцель под редакцией О.А. Олейник.* М.: Мир, 1964.

3. Андрушкевич И. Е. *Методы разделения переменных в волновых уравнениях.* Новополоцк: ПГУ, 2010.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНЩИКИ СОСТОЯНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИАБЕТА

А.И. Астровский

В докладе предложен и обоснован метод построения асимптотических оценщиков состояний в математической модели [1] диабета первой степени на основе подхода, предложенного в [2–4]. Проблема оценивания состояний систем наблюдения по доступной информации интенсивно исследуется в связи с ее важностью для различных объектов управления. При построении управлений типа обратной связи, как правило, необходимо знать вектор состояния системы (фазовый вектор). Однако в реальных ситуациях непосредственное измерение фазового вектора затруднительно либо по техническим причинам, либо из-за невозможности проведения процесса наблюдения, либо вследствие чрезмерно высокой его стоимости. При рассмотрении детерминированных линейных конечномерных систем наблюдения оценивание состояний предполагает наличие у системы определенного типа наблюдаемости. В стационарном случае полная наблюдаемость системы гарантирует существование асимптотического эстиматора. Понятно, что для систем с переменными коэффициентами проблема значительно усложняется. Для нестационарных линейных систем существует целый ряд понятий наблюдаемости: полная, дифференциальная, равномерная, равномерно полная, наблюдаемость с помощью разрешающих операций, аппроксимативная, равномерно точечная, наблюдаемость в классе систем функций Чебышева, хессенбергова и т.д. Отметим, что в понятии равномерно полной наблюдаемости наиболее адекватно заложены специфические свойства, необходимые для существования асимптотических оценщиков. Однако это понятие трудно проверить в терминах коэффициентов исходной системы наблюдения, и поэтому с конструктивной точки зрения мало эффективно. В теории оценивания состояний с конструктивной точки зрения, пожалуй, наиболее важную роль играет понятие равномерной наблюдаемости, Конструирование асимптотических оценщиков состояний предполагает построение такой динамической системы, на вход которой подается выходная функция исходной системы, и при этом состояние оценщика должно в том или ином смысле асимптотически приближать состояние исходной системы. Предложенный в работах И.В. Гайшуна и А.И. Астровского подход на основе техники квазидифференцирования позволяет существенно ослабить известные требования гладкости коэффициентов при построении экспоненциальных оценщиков состояний.

В докладе для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей глюкозо-инсулиновое взаимодействие в теле пациента (модель Hovorka [1]), на основе метода линеаризации вдоль базисной траектории предложен способ построения асимптотических оценщиков состояний с учетом выходной функции в виде подкожного измерения уровня глюкозы.

Литература

1. Hovorka R., Canonico V., Chassin L. J. and etc. *Nonlinear model predictive control of glucose concentration in subjects with type 1 diabets* // Physiological measurement. 2004. V. 25(4). P. 905–920.

2. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 370–379.

3. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. *Observability of Linear Time-Varying Systems with Quasiderivative Coefficients* // SIAM J. Control and Optimization. 2019. V. 57. № 3. P. 1710–1729.

4. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений.* Минск: Беларус. навука, 2013.

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В.М. Волков, Е.И. Мацулевич, Дун Цзинхуэй

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного эллиптического уравнения в прямоугольной области:

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx}\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y),\quad (x,y)\in[-1,1]\times[-1,1], \quad (1)$$

$$u(x=\pm 1,y)=u(x,y=\pm 1)=0. \quad (2)$$

В общем случае коэффициенты задачи σ_{xx}, σ_{yy} и $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$ являются функциями координат и удовлетворяют условию эллиптичности.

Для численного решения данной задачи используем спектральный метод Чебышева [1]. На сетке узлов

$$\omega_h=\left\{(x_k,y_m),\ x_n=y_n=\cos\frac{n\pi}{N+1},\ n=k=\overline{1,N},\ m=\overline{1,N}\right\}, \quad (3)$$

дифференциальная задача (1), (2) сводится к системе алгебраических уравнений

$$AU=F, \quad (4)$$

где F и U – векторы значений функции правой части и приближенного решения уравнения (1) в узлах сетки (3), матрица $A\in R^{N^2\times N^2}$ имеет блочную структуру и строится на основе матриц спектрального дифференцирования Чебышева [1].

Для решения системы (4) используем метод бисопряженных градиентов (BiCG) [2] с переобусловливателем $P=D\Lambda$, где Λ – разностный аналог оператора Лапласа на сетке (3), D – диагональная матрица, элементы которой

$$d_{kk}=\sigma_{xx}(x_i,y_j)+\sigma_{yy}(x_i,y_j),\quad k=i+j(N-1).$$

Диагональная часть переобуславливателя применяется непосредственно к системе (4) до начала вычислений, а для обращения переобуславливателя Λ на каждой итерации воспользуемся итерационным методом переменных направлений (МПН) с оптимальным набором итерационных параметров [3].

Таким образом, для реализации спектральной модели использованы два вложенных итерационных алгоритма. На внешнем цикле используется метод BiCG, а на внутреннем — МПН. Целью данной работы является исследование поведения внешнего итерационного метода при снижении требований точности на внутренних итерациях. В частности, основной вопрос состоит в оценке минимального количества внутренних итераций, позволяющего достичь наискорейшую сходимость итерационного алгоритма в целом. Для выяснения вопроса воспользуемся методом численного эксперимента.

Рассмотрим модельную задачу (1), (2) с коэффициентами и правой частью, обеспечивающими заданное точное решение:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xx}=\exp\bigl(-\eta(x^2+y^4)\bigr),\ \ \sigma_{xy}=\sigma_{yx}=0,\ \ u(x,y)=(x^2-1)(y^2-1)\exp(x^2+y^2).$$

Определим относительную норму невязки метода biCG $\varepsilon=10^{-10}$. Для достижения такой точности МПН на сетке (3) с количеством узлов $N=100\div 250$ реализация переобусловливается в виде двумерного разностного оператора Лапласа согласно оценкам [3] требует $41 \div 47$ внутренних итераций. Результаты численных экспериментов показывают, что такое количество итераций является существенно завышенным.

На рис. 1 а. представлены зависимости количества внешних biCG итераций от размерности сетки при разном фиксированном количестве внутренних итераций МПН, $\eta = 1$. Как видно из рисунка, достаточно всего лишь 7 внутренних итераций для того, чтобы количество внешних итераций утратило зависимость, как от размерности сетки N, так и от увеличения количества внутренних итераций. В определенном смысле количество внутренних итераций $K = 7 \pm 1$ может рассматриваться как оптимальное, так как именно в этом интервале наблюдаются минимальные общие вычислительные затраты для достижения заданной точности (см. рис. 1. б). Об этом говорят и результаты численных экспериментов для других параметров задачи. Например, при увеличении неоднородности коэффициентов, $\eta = 2 \div 4$, количество внешних итераций возрастает, но их минимальное значение по-прежнему достигается при $K = 7 \pm 1$. Следует отметить, что увеличение числа внутренних итераций выше $K > 7$, часто влечет за собой рост числа внешних итераций, что указывает на нетривиальность выбора оптимального значения K.

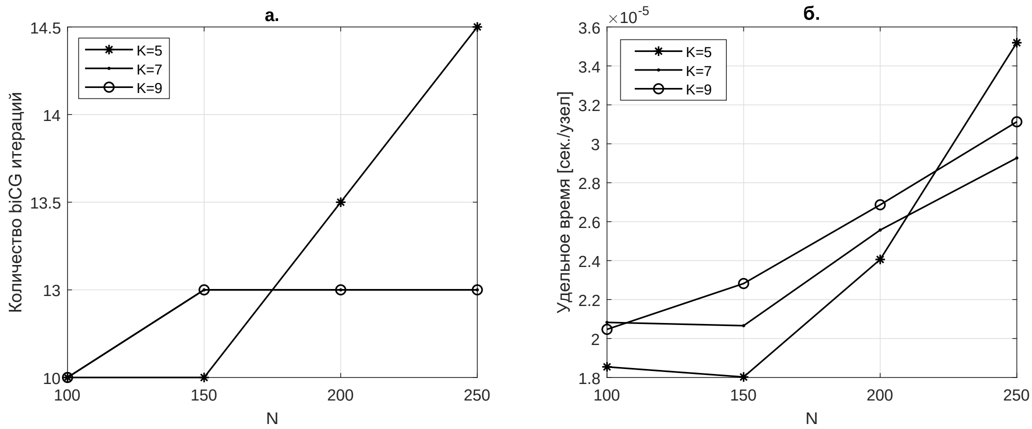


Рис. 1. Зависимости количества внешних BiCG итераций и удельного времени решения задачи от размерности сетки при различном количестве внутрених МПН итераций.

В случае $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \neq 0$ матрица A системы (4) не является разреженной, поэтому вычисление произведения данной матрицы на вектор следует реализовывать в три этапа: умножения матрицы спектрального дифференцирования на двумерный массив решения, поэлементного умножения полученного массива на массив значений соответствующих коэффициентов и последующего умножения результата на матрицу спектрального дифференцирования. Производной по x соответствует умножение слева матрицы спектрального дифференцирования C на двумерный массив решения U, в котором столбцы массива содержат распределение решения вдоль оси x для каждого значения y_k, $k = \overline{1, N}$. Для вычисления производной по y используем произведение UC^T. В остальном структура метода не меняется и зависимость сходимости внешних итераций от количества внутренних итераций качественно аналогична рассмотренному выше случаю. Рассмотренный метод может быть использован для численного решения задач в области более сложной геометрии [4].

Литература

1.Trefethen L. N. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia: SIAM, 2000.

2. Van der Vorst H. A. *BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems* // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1992. V. 13, № 2. P. 631–-644.

3. Самарский А. А., Николаев Е. С. *Методы решения сеточных уравнений.* М.: Наука, 1978.
4. Orszag S. A. *Spectral methods for problems in complex geometrics* // Numerical methods for partial differential equations. Academic Press, 1979. P. 273–305.

ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЙ БИОМАССЫ ЭКОСИСТЕМЫ «ЛЕС – ПОЧВА»

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц

Известно, что «лесная растительность с момента образования сомкнутого древостоя активно воздействует на почву, изменяя ее свойства. Происходящие изменения в почве связаны с видовым составом лесообразующих пород лесного биоценоза» [1].

Для математического описания сосуществования (взаимодействия) лесной растительности и почвы предлагается [2] следующая система дифференциальных уравнений, описывающая биоценоз «лес–почва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dB}{dt} = f_1(B,P,\mu) = rB\left(1-\dfrac{B}{k}\right) - \alpha wP, \\ \dfrac{dP}{dt} = f_2(B,P,\mu) = \gamma(p-P^2)P + \delta w^2 B. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $B(t)$ – биомасса леса, $P(t)$ – мера плодородия почвы, p – мера типа почвообразующей породы, w – влажность почвы, r, k, α, γ, $\delta > 0$ — константы. Параметр μ – это либо r, либо γ, либо p на выбор исследователя.

Стационарные равновесия (B,P) биоценоза «лес–почва», при которых биомасса (относительно) постоянна некоторое время, находим, решая систему уравнений

$$\frac{dB}{dt} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = 0,$$

или

$$\begin{cases} rB\left(1-\dfrac{B}{k}\right) - \alpha wP = 0, \\ \gamma(p-P^2)P + \delta w^2 B = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Имеем очевидное стационарное равновесие $R_0 = (B_0, P_0) = (0,0)$. Остальные равновесия – это решения системы

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\gamma pr}{\alpha w} + v\delta w\right)B - \dfrac{\gamma pr}{\alpha wK}B^2 - \dfrac{\gamma r^3}{\alpha^3 w^3}B^3 + \dfrac{3\gamma r^3}{\alpha^3 w^3 K}B^4 - \dfrac{3\gamma pr^3}{\alpha^3 w^3 K^2}B^5 + \dfrac{\gamma pr^3}{\alpha^3 w^3 K^3}B^6 = 0, \\ P = \dfrac{\gamma r}{\alpha w}B\left(1-\dfrac{\gamma B}{K}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Первое уравнение системы (3) даёт решение $B_0 = 0$, и затем поиск корней сводится к решению уравнения 5-й степени по B. Следовательно, имеется, как минимум, ещё один действительный корень B_1. Остаётся найти корни уравнения 4-й степени.

Однако, например, при

$$r = \alpha = \beta = \gamma = w = K = 1, \quad p = 2, \quad \delta = 20$$

это уравнение 4-й степени не имеет действительных корней. В данном случае имеем стационарное равновесие $R_1 = (B_1, P_1) \approx (-1,4; -3,36)$.

Но возможен ли переход от стационарных равновесий к циклическим, наличие которых описывается в литературе? Возможен. И математически для системы (1) это обнаруживается через механизм бифуркаций Андронова-Хопфа [3,4].

В самом деле, рассмотрим стационарное равновесие $R_0 = (B_0, P_0) = (0, 0)$. Для него вычисляем собственные числа, решая уравнения

$$\det \left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(B, P)}(B_0, P_0) - \lambda E \right| = 0.$$

При выполнении неравенства $(r - \gamma p)^2 < 4\alpha\delta w^3$ имеем пару комплексно-сопряжённых корней, причем

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{1}{2}(r + \gamma p), \quad \frac{d\operatorname{Re}\lambda}{d\mu} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}p, \quad \frac{1}{2}\gamma > 0$$

с параметром μ, оговоренным выше.

Следовательно, по теореме Андронова-Хопфа [3, 4] может установиться автоколебание во всех трёх случаях параметра μ. При потере устойчивости равновесия $R_0 = (B_0, P_0) = (0, 0)$ биоценоз претерпевает бифуркацию Андронова– Хопфа. Второе равновесие $R_1 = (B_1, P_1)$ таким свойством не обладает.

Хотя, видимо, следует говорить не о простых автоколебаниях, а о катастрофических автоколебаниях, которые являются следствием грандиозных изменений климата или ураганов.

Равновесия R_0, R_1 не являются реальными равновесиями, поскольку в реальной ситуации

$$B(t) > 0, \quad P(t) > 0,$$

т. е. биомасса и мера плодородия почвы — положительные величины, и, следовательно, нужно брать ненулевые положительные значения для координат равновесия. Но в действительности вместо уравнения (1) можно рассматривать систему

$$\begin{cases} \dfrac{dB}{dt} = r(B - B_*)\left(1 - \dfrac{(B - B_*)}{k}\right) - \alpha w(P - P_*), \\ \dfrac{dP}{dt} = \gamma\big[p - (P - P_*)^2\big](P - P_*) + \delta w^2(B - B_*), \end{cases} \tag{5}$$

где $B_*,\ P_* > 0$ – величины, осуществляющие сдвиг в пространстве (B, P) к реальным значениям равновесий системы «лес-почва».

Понятно, что и до сдвига, и после сдвига $R_i \to R_i^* = (B_i^*, P_i^*)$ равновесие R_1^* имеет меньшее значение биомассы, чем R_0^*.

В соответствии с теорией катастроф равновесие R_1^* при потере устойчивости перейдёт скачком в равновесие R_0^*, а последнее в принципе может вернуться к равновесию R_1^* (пожар, рубка леса), но скорее всего следует ожидать бифуркации Андронова–Хопфа, поскольку именно это отвечает нормальной эволюции леса.

Поэтому скачкообразная смена $R_1^* \to R_0^*$ стационарного равновесия системы говорит о том, что лес переходит к равновесию, в котором он продуцирует больше биомассы, и при потере устойчивости этот стационарный процесс закончится переходом посредством бифуркации Андронова–Хопфа [3, 4] к циклическим изменениям биомассы и состояния почвы.

Можно проинтерпретировать это, как стационарное существование экосистемы в состоянии R_1^* с малой продукцией биомассы (посадки), затем переход к состоянию R_0^* с большей продукцией биомассы (зрелый лес), и, наконец, экосистема оказывается в состоянии, когда каким-то образом периодически меняются биомасса и плодородие почвы (пожары + восстановление леса после пожаров или вырубки + восстановление леса после пожаров или вырубок).

Литература

1. Ничипорович А. А., Овчаров К. Е. *КПД зеленого листа, витамины в растениях.* https://lsdinfo.org/vozdejstvie-lesov-na-pochvu.

2. Володченкова Л. А., Гуц А. К. *Математические модели лесных экосистем с бифуркациями Андронова-Хопфа* // Математические структуры и моделирование. 2021. № 3(59). С. 92–108.

3. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и её приложения.* М.: Мир, 1980.

4. Касти Дж. *Большие системы. Связность, сложность и катастрофы.* М.: Мир, 1982.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ПАНДЕМИИ COVID-19 НА БАЗЕ СПЕЦИФИКАЦИИ SIR МОДЕЛИ

А.С. Горулёв, А.В. Капусто

В период с декабря 2019 по март 2022 года по всему миру было зафиксировано 488 млн. случаев заражения коронавирусной инфекцией, 6,14 млн. из которых имели летальный исход (хотя показатель смертности считается заниженным). Самой смертоносной пандемией прошлого века принято считать испанку (испанский грипп), которая в 1918 – 1922 гг. после Первой мировой войны унесла жизни 50 миллионов человек или 2,73% от всего населения. Число жертв пандемий чумы (541–542 гг., 1347–1351 гг.) было еще более многочисленным. Последствия пандемий сказываются во всех сферах деятельности как отдельного человека, так и стран в целом, — социальной, финансовой, политической и т.д. Поэтому большое значение приобретают не только достижения медицины в области борьбы с инфекциями, но и все результаты в направлении моделирования распространения и развития эпидемий [1].

Наиболее известной моделью развития эпидемий считается SIR модель, в основе которой лежит разделение населения на восприимчивых (S), инфицированных (I) и переболевших (R). Она имеет высокую точность прогноза при большой популяции и легко может быть расширена путем добавления дополнительных параметров [2]. Например, в известную SEIR модель включают E – инкубационный период.

Для повышения точности прогноза в проведенном исследовании в классическую SIR модель было добавлено 3 параметра: H – госпитализированные (не в реанимации или отделении интенсивной терапии), C – госпитализированные (в реанимации или отделении интенсивной терапии) и D – умершие от болезни.

SIHCDR модель описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dS(t)}{dt} = -\theta_I(t)\cdot\frac{S(t)}{N-D(t)} - \mu\cdot S(t),\\
&\frac{dI(t)}{dt} = \theta_I(t)\cdot\frac{S(t)}{N-D(t)} - (\omega_1+\eta+\mu)\cdot I(t),\\
&\frac{dH(t)}{dt} = \eta I(t) - (\omega_2+\lambda_1+\xi+\mu)\cdot H(t),\\
&\frac{dC(t)}{dt} = \xi H(t) - (\omega_3+\lambda_2+\mu)\cdot C(t),\\
&\frac{dD(t)}{dt} = \lambda_1 H(t) + \lambda_2 C(t),\\
&\frac{dR(t)}{dt} = \omega_1 I(t) + \omega_2 H(t) + \omega_3 C(t) - \mu R(t),
\end{aligned}
$$

где $S(t)$ – количество восприимчивых на момент времени t, $I(t)$ – количество инфицированных на момент времени t, $H(t)$ – количество госпитализированных без интенсивной терапии на момент времени t, $C(t)$ – количество госпитализированных в отделении интенсивной терапии на момент времени t, $D(t)$ – количество умерших от пандемии на момент времени t, $R(t)$ – количество выздоровевших на момент времени t, N – население страны, μ – естественный уровень смертности, $\theta_I(t)$ – коэффициент перехода из категории S в категорию I, ξ – коэффициент перехода из категории H в категорию C, ω_1, ω_2, ω_3 – коэффициенты выздоровления из категорий I, H и C соответственно, λ_1 – коэффициент смертности от болезни для категории H, λ_2 – коэффициент смертности от болезни для категории C, η – коэффициент госпитализации [3].

Проведение моделирования требует определения коэффициентов модели на базе ряда вспомогательных статистических данных, для чего была использована находящаяся в свободном доступе требуемая статистическая информация по Германии.

Моделирование с использованием системы дифференциальных уравнений выполнялось в пакете прикладных программ MATLAB [4]. Для решения системы с заданными параметрами применялась функция ode45. Показатели времени лечения, периодов заразности и интенсивной терапии были определены по оценкам Института имени Роберта Коха. При оценке количества контактов использовались средние показатели из статей и публикаций на тему распространения пандемии. Коэффициенты госпитализации и смертности рассчитаны на основе данных электронного источника de.statista.com.

С целью проверки точности прогноза и корректировки значений коэффициентов было проведено моделирование второй волны распространения пандемии COVID-19 в Германии на основе данных электронных ресурсов de.statista.com, worldometers.info и intensivregister.de за период, предшествующий вспышке заболеваемости. В результате моделирования была получена картина динамики изменения количества инфицированных людей, которая подтвердила корректность модели, что позволило рассчитать коэффициент риска заражения.

Моделирование четвертой волны COVID-19 продемонстрировало изменение количества инфицированных людей во второй половине 2021 года и в 2022 году в зависимости от принимаемых государством мер, а также дало основание для ожидания пятой волны пандемии в 2022 году при отсутствии локдауна во время четвертой волны.

Прогнозирование будущих волн распространения пандемий и эпидемий играет важную роль в краткосрочном и среднесрочном планировании и позволяет заранее оценить потенциальный ущерб данной угрозы и принять решение о целесообразности введения ограничительных мер.

Литература

1. Kermack W. O., McKendrick A. G. *A contribution to the mathematical theory of epidemics* // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1927. V. 115. P. 700-721.

2. Piccolomiini E. L., Zama F. *Monitoring Italian COVID-19 spread by an adaptive SEIRD model* // medRxiv. https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2020.04.03.20049734v1.

3. Treibert S. M. *The SIR Model in Epidemic Modelling. In: Mathematical Model-ling and Nonstandard Schemes for the Corona Virus Pandemic.* BestMasters. Springer Spektrum: Wiesbaden, 2021.

4. Ashiro R., Nagase M., Vaillancourt R. *Behind and beyond the Matlab ODE suite* // Comput. Math. Appl. 2000. V. 40. P. 491-512.

ЭКРАНИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В НАТУРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ, ЭКРАНАМИ ИЗ ПЕРМАЛЛОЯ

В.Т. Ерофеенко, Г.Ф. Громыко, Г.М. Заяц

Сформулируем трёхобластную краевую задачу экранирования плоского импульсного электромагнитного поля экраном из пермаллоя с нелинейным уравнением для поля намагниченности.

Краевая задача. *Для первичного поля* $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ *в области* D_1 $(z<0)$, *воздействующего на плоский экран* $D\,(0<z<\Delta)$ *(рис.1), требуется определить электромагнитные поля* $\mathbf{E}_1'$, $\mathbf{H}_1'$; $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ *в областях* $D_1\,(z<0)$, $D_2\,(z>\Delta)$ *и поля* $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}$ *в слое* D, *которые удовлетворяют следующим условиям [1]:*
– уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_1' = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_1', \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_1' = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_1', \quad z<0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_2 = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_2, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_2 = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_2, \quad z>\Delta, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\dot\sigma\mu_0}(\Delta\mathbf{H} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H}) - \dot\gamma\mathbf{P}, \quad \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} = \dot\gamma\mathbf{P}, \quad 0<z<\Delta, \tag{3}$$

$\mathbf{P}$ *– нелинейное поле;*
– граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитных полей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$; $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$, *в областях* D_1, D_2 *и полей* $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}$ *в слое* D *на плоскостях* $\Gamma_1\,(z=0)$, $\Gamma_2\,(z=\Delta)$:

$$(\mathbf{E}_\tau - \mathbf{E}_{1\tau})|_{z=0} = 0, \quad ((\mathbf{H}+\mathbf{M})_\tau - \mathbf{H}_{1\tau})|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1', \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1',$$

$$(\mathbf{E}_\tau - \mathbf{E}_{2\tau})|_{z=\Delta} = 0, \quad ((\mathbf{H}+\mathbf{M})_\tau - \mathbf{H}_{2\tau})|_{z=\Delta} = 0; \tag{4}$$

– граничным условиям для поля намагниченности на плоскостях Γ_1, Γ_2:

$$M_x|_{z=0} = 0, \quad M_y|_{z=0} = 0, \quad (\mathbf{H}+\mathbf{M}, \mathbf{n})\,|_{z=0} = H_{sm}c(t'), \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_z,$$

$$M_x|_{z=\Delta} = 0, \quad M_y|_{z=\Delta} = 0, \quad (\mathbf{H}+\mathbf{M}, \mathbf{n})\,|_{z=\Delta} = 0, \tag{5}$$

H_{sm}, $c(t')$ *определены в [1];*
– условиям излучения на бесконечность в областях D_1, D_2.

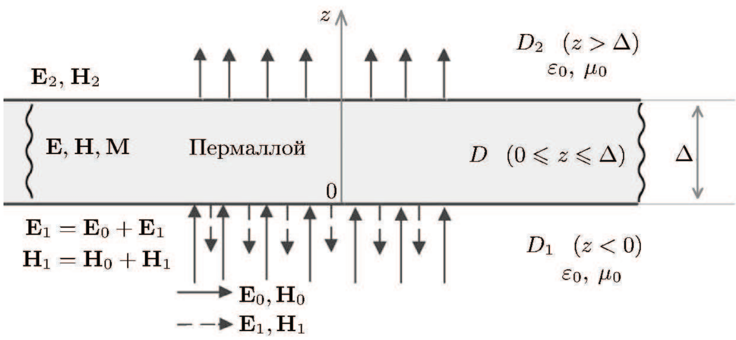


Рис. 1. Экранирование электромагнитного импульса $\mathbf{E_0}$, $\mathbf{H_0}$ экраном D.

В качестве первичного поля рассмотрим импульсное поле

$$\mathbf{E}_0(z,t) = -B_0\left(T^{(-)}\right)\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{H}_0(z,t) = \frac{1}{Z_0}B_0\left(T^{(-)}\right)\mathbf{e}_x, \quad B_0(t') = Z_0H_0b(t'),$$

где H_0 – максимальное значение магнитного поля $\mathbf{H}_0$, $T^{(-)} = \dfrac{ct-z}{c\tau}$, $\tau = \dfrac{1}{2}T_{\text{имп}}$, $T_{\text{имп}}$ – длительность импульса, $t' = \dfrac{2t}{T_{\text{имп}}}$ – безразмерное время, c – скорость света.

В технических экспериментах используются импульсы вида (рис. 2)

$$b(t') = \begin{cases} 0.5\sin\left(0.5\pi(10t' - 1)\right) + 0.5, \quad 0 \leqslant t' \leqslant 0.2, \\ \exp\left(-c_0(10t' - 2)^2\right), \ \ c_0 = \ln 2/9, \quad 0.2 \leqslant t' \leqslant 2, \\ 0, \quad t' \leqslant 0, \ \ t' \geqslant 2, \end{cases} \tag{6}$$

в которых $t' = 0.2$ – время фронта импульса, $t' = 0.5$ – время полуспада, $t' = 2$ – время длительности импульса.

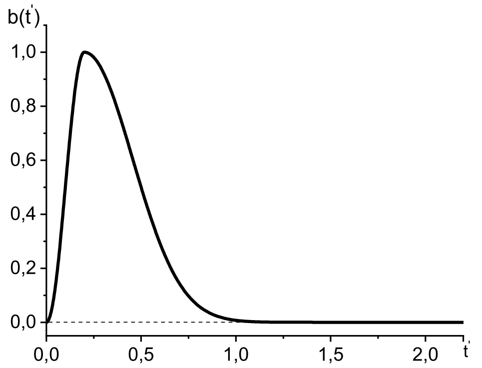


Рис. 2. Структура импульса (6) магнитного поля $\mathbf{H_0}$, воздействующего на экран D.

Коэффициент эффективности экранирования, показывающий во сколько раз ослабевает электромагнитный импульс при прохождении через экран, определим формулой

$$Э = \frac{\max\limits_{0\leqslant t<\infty} |\mathbf{E}_0(0,t)|}{\max\limits_{0\leqslant t<\infty} |\mathbf{E}_2(\Delta,t)|}.$$

Краевая задача (1)–(5) является трёхобластной краевой задачей для областей D_1, D_2, D, которая для численной реализации преобразована [1] в однообластную начально-краевую задачу относительно безразмерных компонент магнитного поля u_i и компонент поля намагниченности v_i, $i = 1,2,3$. Для решения используется сеточный метод.

Численно исследованы характеристики электромагнитного поля в зависимости от начального импульса. Вычислен коэффициент эффективности экранирования Э в зависимости от характеристик экрана. Например, для экрана толщиной $\Delta = 10^{-4}$ м с проводимостью $\dot{\sigma} = 6\cdot 10^3$ См/м и $H_{sm} = 10^2 A$/м, $H_0 = 10^3 A$/м получен коэффициент эффективности экранирования $Э = 115.0$, а с проводимостью $\dot{\sigma} = 5\cdot 10^3$ – $Э = 95.0$.

Литература

1. Ерофеенко В. Т., Громыко Г. Ф., Заяц Г. М. *Численное моделирование задач экранирования импульсных электромагнитных полей экранами из пермаллоя* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1682–1697.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ i-ГЛАДКОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Ким

i-Гладкий анализ [2, 3] позволяет разрабатывать теорию систем с последействием аналогично теории ОДУ, при этом в случае исключения (исчезновения) запаздывания, получаемые результаты переходят с точностью до обозначений в соответствующие результаты теории ОДУ [2–6].

В докладе на примерах

- Метода функционалов Ляпунова-Красовского,
- Метода динамического программирования для систем с последействием,
- Теории АКОР для систем с последействием,
- Метода типа Рунге-Кутты для систем с "произвольным" последействием

объясняются принципы исследования задач теории ФД на основе методологии i-гладкого анализа [2-4].

Разработанные на основе i-гладкого анализа численные методы решения ФДУ реализованы в форме пакета прикладных программ **Time-Delay System Toolbox** [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00352).

Литература

1. Красовский Н. Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* М.: Физматгиз, 1959.
2. Ким А. В. *i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения.* Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
3. Kim A. V. *i-Smooth analysis. Theory and Applications.* New Jersey: Wiley, 2015.
4. Kim A. V., Ivanov A. V. *Systems with Delays. Analysis, Control and Simulation.* New Jersey: Wiley, 2015.
5. Kwon W. H., Kim A. V., Kormyshev V. M., Pimenov V. G., Lozhnikov A. B., Solodushkin S. I. *Analytical constructing of regulators for systems with delays.* Ekaterinburg: Ural Federal university press, 2011.
6. Kim A. V., Kwon W. H., PimenovV. G., Han S. H., Lozhnikov A. B., Moon Y. S. *Time-Delay System Toolbox (for use with Matlab).* Seoul National university. School of Electrical Engineering, 1998.

К СТРУКТУРЕ ПО ПРАНДТЛЮ-КАРМАНУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В.Н. Лаптинский

Исследуется система соотношений

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$u_x|_{y=0} = 0, \ \ u_y|_{y=0} = 0; \ \ u_x|_{y=\delta(x)} = U(x), \tag{3}$$

представляющая собой задачу Прандтля о динамическом турбулентном пограничном слое конечной толщины $\delta(x)$ в случае плоского несжимаемого течения жидкости, [2, с. 368], при этом для турбулентной составляющей τ_t полного напряжения трения $\tau = \tau_l + \tau_t$ используется формула Прандтля

$$\tau_t = \rho\kappa^2 y^2 \left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right| \frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{4}$$

где $\tau_l = \mu \partial u_x / \partial y$ – ламинарная составляющая. Искомыми величинами являются функции $\delta(x)$ и $\tau_0(x)$ – касательное напряжение; знак осреднения скорости опущен.

В случае ламинарного течения в работе [3] по методу [4] получено точное решение этой задачи. Однако вследствие чрезвычайной сложности картины турбулентного течения и отсутствия рациональных теорий турбулентности решение задачи (1)–(3) в строгой математической постановке в настоящее время невозможно [2, с. 380]. Для расчета турбулентных течений используются различные полуэмпирические теоретические гипотезы, связывающие силы турбулентной вязкости, вызываемые турбулентным перемешиванием, с осредненными во времени скоростями. Только после введения таких гипотез гидродинамические дифференциальные уравнения осредненного движения принимают вид, допускающий их интегрирование [1, с. 520]. Первой была гипотеза Л. Прандтля, основанная на понятии пути перемешивания $l = l(y)$, на основе которого функция $\tau_t = \tau_t(x, y)$ представима в виде

$$\tau_t = \rho l^2(y) \left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right| \frac{\partial u_x}{\partial y};$$

тогда

$$\tau = \mu\frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho l^2(y) \left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right| \frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{5}$$

Присутствие абстрактной функции $l(y)$ делает задачу неопределенной. Однако в непосредственной близости от обтекаемой гладкой поверхности (без шероховатостей), то есть в области ламинарного подслоя $0 \leqslant y < \delta_l$, функция $l(y)$ имеет вид [5, с. 392] $l = \kappa y$, где κ – известная полуэмпирическая постоянная ($\kappa \approx 0,4$); тогда τ_t имеет вид (4), и постановка задачи уточняется, а ее анализ облегчается, при этом знак модуля можно убрать.

В [6–8] предприняты попытки аналитического решения задачи в случае, когда

$$l(y) = \kappa y, \quad 0 \leqslant y \leqslant \delta(x). \tag{6}$$

Это жесткое ограничение, но оно позволяет применить методику [4], дополненную понятием ударной вязкости пограничного слоя. В [6–8] получены определенные соотношения, дающие основу для построения функций $\delta(x)$, $\tau_0(x)$ либо структуру этих функций, описывающую роль физических параметров задачи (1)–(3) в формировании пограничного слоя.

В данной работе на основе формулы Прандтля (5) и преобразованного уравнения Кармана [1, с. 604]

$$\frac{d\delta}{dx} + \left(2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{U'}{U}\delta = \frac{\tau_0}{\alpha_1 \rho U^2}, \tag{7}$$

а также соотношения

$$\tau_0 = \frac{1}{c_\tau}\left(\mu\frac{U}{\delta} + \rho\kappa^2\delta^2 c_t \frac{\tau_0^2}{\mu^2}\right),$$

определяемого с помощью величины ударной вязкости пограничного слоя, получено уравнение относительно $\delta(x)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d\delta^2}{dx} + F\frac{U'}{U}\delta^2 = \frac{\nu}{\alpha_1 c_\tau U} + \frac{c_t \kappa^2 \delta^3}{\alpha_1 c_\tau \mu^2 U^2}\tau_0^2, \tag{8}$$

где

$$\tau_0 = \frac{2\mu U}{\delta\left[c_\tau + \sqrt{c_\tau^2 - 4c_t\kappa^2\delta U/\nu}\right]}; \tag{9}$$

здесь $c_\tau = c_\tau(x)$, $c_t = c_t(x)$ – структурные функции, конструируемые на основе безразмерных интегральных средних $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}_t$ по $y \in [0, \delta(x)]$ безразмерных напряжений трения соответственно τ, τ_t; величины [1, с. 194]

$$\alpha_1 = \int\limits_0^1 f(s)\big(1 - f(s)\big)\,ds, \quad \alpha_2 = \int\limits_0^1 \big(1 - f(s)\big)\,ds$$

вычисляются по полуэмпирической функции $f(s)$ автомодельного типа, определяемой по соответствующему профилю скоростей $u_x/U = f(y/\delta) \equiv (y/\delta)^n$ [1, с. 604], [5, с. 394].

Замечание. Подкоренное выражение в (9) является безусловно неотрицательным на основании неравенств $c_l < c_\tau \leqslant 2c_l < 2$, где c_l – структурная функция, определяемая на основе $\bar{\tau}_l$. Все используемые структурные функции изменяются в строгих границах от 0 до 1; они являются постоянными величинами только для профиля скоростей автомодельного типа.

Литература

1. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* М.: Наука, 1974.

2. Емцев Б. Т. *Техническая гидромеханика.* М.: Машиностроение, 1987.

3. Лаптинский В. Н. *Точное решение задачи Прандтля о динамическом ламинарном пограничном слое* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 4. С. 549–552.

4. Лаптинский В. Н. *Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае* // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. XLIV. № 5. С. 72–93.

5. Авдуевский В. С. [и др.]. *Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике.* М.: Машиностроение, 1975.

6. Лаптинский В. Н. *К решению задачи о динамическом турбулентном пограничном слое* // Еругинские чтения – 2019: материалы XIX междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Могилев, 14-17 мая 2019 г. Могилев, 2019. Ч. II. С. 82–84.

7. Лаптинский В. Н. *Решение по Прандтлю задачи о динамическом турбулентном пограничном слое* // Междунар. матем. конф. «Седьмые Богдановские чтения по обыкн. дифференц. уравнениям»: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 1–4 июня 2015 г. Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2021. С. 183–185.

8. Лаптинский В. Н. *Структура по Прандтлю–Карману решения задачи о динамическом турбулентном пограничном слое* // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы I Международной научно-технической конференции. Ижевск, 2021. С. 86–90.

ДВЕ ЗАДАЧИ КАЧЕСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В.М. Овсянников

Л. Эйлер вывел в 1752 г. уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости с учетом слагаемых высокого порядка малости по времени деформации контрольной фигуры [1–3]

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+(t-t_0)^2\,\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=0.$$

Здесь u, v, w – компоненты скоростей вдоль координатных осей x, y, z; $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ и $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ – якобианы поля скорости второго и третьего порядков.

Члены высокого порядка по времени получены Эйлером точным геометрическим расчетом при использовании линейного по времени t закона движения жидкой частицы в форме уравнений Коши-Гельмгольца. Возникает вопрос об использовании членов высокого порядка малости уравнения неразрывности в математической физике.

Дж. Лайтхилл в 1952–1954 гг. методом акустической аналогии показал путь вывода волнового уравнения с использованием взятия производной по времени от уравнения неразрывности. В 2006 г. после учета сжимаемости в уравнении неразрывности Эйлера автором было получено [4, 5] волновое уравнение для малосжимаемой жидкости в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\left(\frac{1}{c_0^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\rho_0\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+(t-t_0)\rho_0^2\,\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}.$$

Здесь c_0 – скорость звука, ρ_0 – термодинамическая плотность.

Эйлер уничтожил в уравнении неразрывности члены высокого порядка малости предельными переходами. Упрощенное уравнение неразрывности дало обоснование для введения оператора дивергенции, который проник во многие разделы математики.

Вывод уравнения неразрывности при использовании других лагранжевых законов движения жидкой частицы дает другие формы членов высокого порядка малости. Поэтому возникает вопрос о качественных решениях волнового уравнения, когда неоднородная часть отлична от нуля и имеет различные зависимости от времени. Полученные приближенные решения [6–8] свидетельствуют об описании генерации звуковых волн, вибраций, автоколебаний дополнительными членами уравнения неразрывности. Но эта проблема, ввиду своей важности и частого описания аварийных ситуаций, нуждается в более точных исследованиях.

Второй задачей является использование выведенной Эйлером более полной формы оператора дивергенции в системе уравнений электродинамики Максвелла 1873 г.

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu\mu_0\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\varepsilon\varepsilon_0\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{J},\quad \operatorname{div}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0,$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, c – скорость света, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, ε и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\mathbf{J}$ – вектор плотности электрического тока.

Использование в докладе [9] дополнительных членов оператора дивергенции в уравнении для напряженности магнитного поля H приводит формально к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}=$$

$$=\frac{\partial J_y}{\partial z}-\frac{\partial J_z}{\partial y}-\frac{t-t_0}{\tau q}\,\frac{\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(H_y,H_z)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(H_z,H_x)}{\partial(z,x)}\right]}{\partial x}-\left(\frac{t-t_0}{\tau q}\right)^2\frac{\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y,H_x)}{\partial(x,y,z)}\right]}{\partial x},$$

в котором слагаемые не имеют одинаковой размерности. Для выравнивания размерностей суммирующихся членов искусственно введен коэффициент τq, значение которого не известно. Получено волновое уравнение, о котором известно, что присутствующие в нем слагаемые электромагнитной индукции Фарадея могут быть увеличены на некоторую величину. Таким образом возникает дополнительная ЭДС за счет слагаемых высокого порядка малости уравнения неразрывности, вычисленных Эйлером. Для рассмотрения задач самовоспламенения электрических приборов, лесов важно получить даже качественное, а не количественное решение вновь выведенного волнового уравнения.

Литература

1. Euler L. *Principia motus fluidorum. Pars prior* // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae. 1761. T. 6 (1756–1757). P. 271–311. – Opera omnia. S. II. V. 13. P. 1–369.

2. Euleri L. *Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius* / Edidit C.A. Truesdell. Lausannae, 1954.

3. Эйлер Л. *Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН* / Пер. с латинского Е.В. Ивановой и В.М. Овсянникова. 4-е изд., доп. М.: Спутник+, 2020.

4. Овсянников В. М. *Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения* // Итоги науки и техн. Сер. соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 182. С. 95-100.

5. Ovsyannikov V. M. *Euler's Equation of Continuity: Additional Terms of High Order of Smallness – An Overview* // Fluids. 2021. V. 6(162).

6. Овсянников В. М. // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 2. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019.

7. Овсянников В. М. // ЖВМ и МФ. 2017. № 5. С. 876–880.

8. Овсянников В. М. // Сб. докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 20-24 августа 2015 г. Казань. С. 2823–2824.

9. Овсянников В. М. *Волны напряженности магнитного поля, генерируемые членами высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера* // Сб. материалов 12-ой междунар. конф.-школы мол. ученых «Волны и вихри в сложных средах». 1-3 декабря 2021 г. Москва. М.: ООО "ИСПОпринт", 2021. С. 175–178.

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЭЙЛЕРА С ЧЛЕНАМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ. ОБЗОР

В.М. Овсянников

Уравнение неразрывности Эйлера дает понятие оператора дивергенции и является основным соотношением во многих физико-математических науках. В последние десятилетия обнаружилась в трудах Л. Эйлера и Н. Е. Жуковского более полная его форма. Дополнительные слагаемые высокого порядка малости описывают, как правило, аварийные процессы. Поэтому их изучение и учет весьма актуальны.

В.А. Бубнов в 1997 г, изучая магистерскую диссертацию Н.Е. Жуковского с выводом уравнения неразрывности, нашел вычисленные для него члены второго порядка малости. Позже обнаружилось, что на промежуточных этапах вывод Эйлера 1752 г. уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости, содержит, кроме дивергенции поля скорости, большое количество слагаемых второго и третьего порядков малости по времени t деформации контрольной фигуры [1, 2]. К. Трусделл, делая в 1954 г. краткий перевод латинского текста Эйлера на английский язык [3], эти дополнительные слагаемые объединил в три якобиана второго порядка и в один якобиан третьего порядка.

Уравнение неразрывности Эйлера для несжимаемой жидкости получило вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+(t-t_0)^2\,\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=0. \quad (1)$$

Здесь u, v, w – компоненты скоростей вдоль координатных осей x, y, z; $t-t_0$ – длина интервала времени деформации контрольной фигуры; $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ и $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ – якобианы поля скорости второго и третьего порядков, соответственно.

В последующем тексте Эйлер, идя по пути упрощения результатов, уничтожил члены высокого порядка малости предельными переходами с устремлением интервала времени деформации контрольной фигуры Δt к нулю. Так как все промежуточные результаты сохраняют физический смысл, заложенный в них исходными положениями вывода, то мы обязаны изучить и понять физический смысл членов второго и третьего порядков малости. В процессе этого изучения было понято, что они вызывают образование волн давления и волн плотности в сжимаемой среде. В 2006 г. автором уравнение (1) было записано для сжимаемой среды, и с его помощью выведены волновые уравнения, имеющие второй и третий порядок дифференцируемости по времени. Члены высокого порядка малости, вычисленные Эйлером, после взятия производных по времени, стали иметь более низкий порядок малости. Их учет показал возможность решения ряда инженерных задач, связанных с образованием волн плотности и давления [4], [5]. Оказалось также, что в методе квазилинеаризации Т. Г. Елизарова и ее ученики с успехом используют комплексы с якобианами второго порядка для регулирования скорости сходимости итераций численных решений.

Возникает вопрос: в каком месте другого вывода уравнения неразрывности, сделанного М.В. Остроградским в 1828-1831 гг., теряются аналогичные члены второго и третьего порядка малости по времени? Вывод Остроградского основан на балансе потоков вещества, вошедшего в контрольную фигуру и вышедшего из нее за некоторый малый, но конечный интервал времени Δt. Перейдем в выводе Остроградского от использования интегрального понятия потоков к кинематическому анализу перемещений отдельных жидких частиц за интервал времени Δt и проведем расчет поля скорости для условий конкретной задачи течения несжимаемой жидкости внутри прямого угла. Теория функций комплексного переменного при использовании комплексного потенциала $w=z^2$ дает поле скорости, в котором все частицы, двигаясь по гиперболам, при постоянном значении y имеют одинаковую скорость u в направлении оси x. При постоянном значении x все частицы имеют одинаковую скорость v вдоль оси y. Если выбрать в качестве контрольной фигуры квадрат, один из углов которого расположен в точке начала координат, и проанализировать пути перемещения по гиперболическим траекториям жидких частиц, то получается неожиданный вывод, что за интервал времени Δt в фигуру войдет меньше частиц, чем ее покинет. Это является следствием выпуклости формы контрольной фигуры. Такой же дисбаланс и описывается членами высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера. Этот же механизм можно пояснить так.

М. В. Остроградский, составляя баланс жидких частиц, вошедших в контрольную фигуру и покинувших ее, не учел третьей возможной ситуации - прохода частицей за время Δt контрольной фигуры по секущей и выхода за пределы фигуры. Это свойство только выпуклых фигур. Числовой расчет количества жидких частиц подтверждает на примере течения внутри прямого угла одинаковость числа частиц, дважды пересекших границу, и вычисленных по членам высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера (1). В уравнении Гаусса-Остроградского, записанном через интегральные суммы вместо интегралов, появляются дополнительные члены, зависящие от величины интервала времени Δt. При переходе к интегралам дополнительные члены зануляются предельными переходами устремления к нулю Δx, Δy, Δz, Δt. Уравнение неразрывности для жидкости явилось моделью введения в математику оператора div. Поэтому его слагаемые второго и третьего порядка малости могут проявляться и в других дисциплинах [6].

Литература

1 .Euler L. *Principia motus fluidorum. Pars prior* // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae. 1761. T. 6 (1756–1757). P. 271–311. – Opera omnia. S. II. V. 13. P. 1–369.

2. Эйлер Л. *Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН* / Пер. с латинского Е.В. Ивановой и В.М. Овсянникова. 4-е изд., доп. М.: Спутник+, 2020.

3. Euleri L. *Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius* / Edidit C.A. Truesdell. Lausannae, 1954.

4. Овсянников В. М. *Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения* // Итоги науки и техн. Сер. соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 182. С. 95-100.

5. Ovsyannikov V. M. *Euler's Equation of Continuity: Additional Terms of High Order of Smallness – An Overview* // Fluids. 2021. V. 6(162).

6. Овсянников В. М. *Волны напряженности магнитного поля, генерируемые членами высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера* // Сб. материалов 12-ой междунар. конф.-школы мол. ученых «Волны и вихри в сложных средах». 1-3 декабря 2021 г. Москва. М.: ООО "ИСПОпринт", 2021. С. 175–178.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЖИМОВ ФУЛЛЕРА

Н.С. Павленок

Исследуется линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой критерий качества не содержит членов с управляющими воздействиями, и на последние накладываются геометрические ограничения. Решения такого класса задач часто содержат (кроме релейных) особые участки [1] и участки с режимом Фуллера [2]. В докладе предлагается численный метод построения программных и позиционных решений таких задач.

Рассматривается линейная стационарная система управления с одним входом и со свободным терминальным состоянием. Поведение системы оптимизируется по выпуклому квадратичному функционалу, определенному на траекториях системы

$$\int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{k} d_i x_i^2(t)\, dt \to \min, \quad \dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = x_0, \quad |u(t)| \leqslant L, \quad t \in T = [0, t_f], \quad (1)$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы управления в момент t; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданное начальное состояние системы управления; $u = u(t) \in \mathbb{R}$ – значение скалярного управляющего воздействия; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$; $d_i \in \mathbb{R}$, $d_i > 0$, $i = \overline{1,k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$; $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$.

Функцию $u(t)$, $t \in T$, назовем

- *дискретной* (с периодом квантования h, $h = t_f/N$, $N \in \mathbb{N}$), если $u(t) = u(\tau)$, $t \in [\tau,\ \tau + h[$, $\tau \in T_h = \{0, h, ..., t_f - h\}$;
- *дискретно-особой*, если она дискретна на неособых участках и непрерывна на особых [1], при этом границами особых участков являются моменты $\tau \in T_h$.

Дискретно-особое управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T$, назовем *программой*, если оно удовлетворяет ограничениям: $|u(t)| \leqslant L$, $t \in T$. Программа $u^0(t)$, $t \in T$, *оптимальна*, если на соответствующей ей (оптимальной) траектории $x^0(t)$, $t \in T$, критерий качества достигает минимального значения.

В классе измеримых управляющих воздействий решение задачи (1) может содержать, кроме релейно-особых, участки с режимами Фуллера [2], на которых происходят бесконечно частые переключения управляющих воздействий. Поэтому, следуя работе [3], каждый режим Фуллера заменяется на дискретно-особое управляющее воздействие, которое по значению критерия качества (при соответствующем выборе параметров метода) сколь угодно мало отличается от оптимального управляющего воздействия с режимом Фуллера. Для этого исходная линейно-квадратичная задача оптимального управления аппроксимируется кусочно-линейной, которая в свою очередь решается методом последовательных линеаризаций.

В зависимости от результата решения кусочно-линейной задачи строится оптимальное релейное управляющее воздействие или производится врезка особого участка. Предлагается специальный тест на наличие режима Фуллера. При его отсутствии строится оптимальное релейно-особое управляющее воздействие.

На базе результатов по программным решениям, позволяющим выявить потенциальные возможности системы управления, строится метод оптимального управления в реальном времени [4]. Для определения оптимальной обратной связи исходная задача (1) погружается в семейство задач

$$\int_\tau^{t_f} \sum_{i=1}^{k} d_i x_i^2(t) dt \to \min, \quad \dot{x} = Ax + bu,\ x(\tau) = z, \quad |u(t)| \leqslant L, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t_f], \quad (2)$$

зависящее от момента времени $\tau \in T_h$ и n-вектора z. Пусть $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T(\tau)$, – оптимальная программа задачи (2) для позиции (τ, z). Функцию

$$u^0(\tau, z) = (u^0(t|\tau, z),\ t \in [\tau, \tau + h[),\ \tau \in T_h,\ z \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

назовем *оптимальной дискретно-особой обратной связью* (*позиционным решением* задачи (1)), построение функции (3) — *синтезом оптимальной системы* по принципу замкнутого контура. Вводится понятие *реализации* оптимальной обратной связи

$$u^*(t) = u^0(t, x^*(t)) = u^0(t|\tau, x^*(\tau)), \ \ t \in [\tau, \tau + h[, \ \ \tau \in T_h, \tag{4}$$

ориентированное на вычисление текущих значений оптимальной обратной связи в реальном времени по ходу каждого конкретного процесса управления. Согласно (4), для управления конкретным процессом не нужно знать оптимальную обратную связь (3) целиком, во всей области ее определения, нужны лишь ее значения вдоль изолированной траектории $x^*(t), \ t \in T$. В докладе функция (4) строится по принципу оптимального управления в реальном времени, при котором оптимальная обратная связь (3) не строится целиком. Вместо этого по ходу процесса управления для каждого текущего периода времени $[\tau, \tau + h]$ вычисляются необходимые значения ее реализации $u^*(t)$ за время, не превосходящее периода квантования h.

Все теоретические результаты иллюстрируются на численных примерах, частично рассмотренных в [2, 5].

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Особые оптимальные управления.* М.: Наука, 1973.

2. Фуллер А. Т. *Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества* // Труды I Междунар. конгресса IFAC, 1961. С. 584–605.

3. Gabasov R., Kirillova F. M., Pavlenok N. S. *Constructing open-loop and closed-loop solutions of linear-quadratic optimal control problems* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. № 48(10). P. 1715–1745.

4. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Павленок Н. С. *Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний* // Доклады РАН. № 444(4). С. 371-375.

5. Брайсон А., Ю-Ши Хо *Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление.* М.: Мир, 1972.

МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНВАЗИВНЫХ ПРОЦЕССОВ ПОПУЛЯЦИЙ

А.Ю. Переварюха

Инвазионные процессы популяций в новой среде могут происходить с периодическими импульсными вспышками. Начальный импульс может затухнуть после первого пика, либо развиться серия нерегулярных вспышек. Наиболее агрессивными являются процессы стремительного распространения видов в новые ареалы. Вселения сопровождаются резкими изменениями численности с дефолиацией леса. С точки зрения теории бифуркаций мы имеем дело с принципиально разными сценариями экодинамики, которые не описываются системой уравнений «хищник-жертва» [1].

Важна сущностная трактовка возникновения τ запаздывания $t-\tau$ или обобщенно $t-\psi(t)$. Величина времени τ изначально относилась к регуляции эффективности воспроизводства через задержку онтогенетического развития. Изменение запаздывания по некоторому закону $\tau = \psi(t)$ может возникать при существовании смежных поколений с разной длительностью онтогенеза, когда одно из поколений проходит зимовку, что является специфическим случаем. Длина жизненного цикла вида и интервалы между пиками численности у его популяций не всегда сопоставимые величины на шкале времени. Мы предлагаем разделять запаздывание при интерпретации моделей на репродуктивное (онтогенетическое), регуляционное из-за исчерпания ресурсов и адаптивное — время для выработки ответной реакции.

Для модели экстремальных популяционных процессов актуальна минимальная численность той группы, которая теоретически необходима для выживания локальной популяции. Д. Базыкиным предложено уравнение с квадратичным фактором внешнего сопротивления $-\delta N^2$ для описания сценария исчезновения популяции при пороговом эффекте

$$\frac{dN}{dt} = r\frac{\gamma N^2}{\gamma + \sigma N} - \varsigma N - \delta N^2. \tag{1}$$

Принцип «агрегированной группы» говорит о том, что для популяции есть оптимальный для воспроизводства диапазон численности сообщества $\bar{\Delta} N$. Этот термин применим к общественным животным. Критический минимальный L-порог $L < \inf \bar{\Delta} N$ из этого эффекта напрямую не следует, более того, L-порог плохо совместим с жесткой функцией регуляции $rf(N^k)$, $k \geqslant 2$, в моделях. Многомиллионные колонии социальных насекомых не страдают от высокой плотности. Минимально необходимое количество рабочих насекомых действительно установлено для выживания пчелиных семей.

Подобные резкие изменения представляют проблему для математического моделирования и составляют большую группу переходных процессов существования экосистем, которые переходят в устойчивые режимы. Нами разработаны сценарии для особых случаев популяционной динамики и взаимодействия противоборствующих организмов на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием $t - \tau$. Нами выбраны модификации известных уравнений для описания особой колебательной активности после обычной бифуркации Андронова-Хопфа в (1) после увеличения репродуктивного параметра R, но с последующим разрушением образовавшегося цикла

$$\frac{dN}{dt} = RN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau_1)}{\mathfrak{K}}\right)(\mathfrak{U} - N(t-\tau_2)), \tag{2}$$

где параметр $\mathfrak{U}$ – величина, для которой выполняется неравенство $\mathfrak{U} < \mathfrak{K} \times 0.75$, и которую мы назвали *предкритической емкостью полунасыщения вида-вселенца.* Значение численности $\mathfrak{U}$ играет роль «спускового крючка» для ряда необратимых деструктивных процессов при инвазии и мешает эффективному биотическому противодействию. Важно, что при большом диапазоне значений $R\tau_1$ система не имеет обычного балансового равновесия-точки $N(t) \to K$ и не имеет неустойчивого равновесия, вокруг которого происходят орбитально устойчивые колебания $N_*(t; R\tau_1\tau_2)$. Объема «Экологической ниши» в такой небалансируемой ситуации просто не существует. Поэтому мы заменили в (1) традиционное обозначение величины ниши K на $\mathfrak{K}$, так как по своему смыслу эти величины иные, чем в известной «колебательной» модели Хатчинсона для популяции насекомых, изолированных от внешнего действия в лабораторных условиях

$$\frac{dN}{dt} = RN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right). \tag{3}$$

Модель с запаздыванием в экологии традиционно исследуют с константой функцией-предысторией. K-емкость традиционно усредненный равновесный уровень. Квадратичный закон регуляции в (2) исключительно умозрительное предположение. Минимумы колебаний в (2) так быстро становятся глубокими и околонулевыми

$$\min N_*(t; R\tau) \to 0, \quad R < M < \infty,$$

что пользоваться моделью Хатчинсона в реальности невозможно. Популяция для существования должна всегда поддерживать минимально допустимую численность

$N(t) > \mathfrak{L}$. Для описания начала осциллирующей вспышки можно использовать $\mathfrak{B}$ как порог активного сопротивления

$$\frac{dN}{dt} = RN(t)\left(\frac{\mathfrak{B} - N^2(t-\tau_1)}{(\mathfrak{B} + lN^3(t-\tau))}\right), \tag{4}$$

где $\mathfrak{B}$ – нижний порог запуска серии пиков численности. Величина емкости ниши K – это инфинум для множества значений $\mathfrak{B}$. Полученная серия пиков в (3) без нереального свойства $\min N_*(R\tau, t) \to 0 + \varepsilon$ и с наибольшим

$$\max N_*(R\tau, t_{m1}) > \max N_*(R\tau, t_{m1} + t_p)$$

в самом начале вспышки описывает ряд ситуаций периодических нашествий насекомых, как начало пилообразной вспышки кольчатого шелкопряда в лесах Востока Канады. Для описания противодействия и затухания экстремального процесса предлагаем включить в модель (3) фактор сопротивления биотического окружения или выброса клеток иммуной системой на появление вируса, который будет зависеть и от начальной численности вселенца $N(0)$

$$\frac{dN}{dt} = RN(t)\left(\frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{N}^2(\mathfrak{t}-\tau_1)}{(\mathfrak{B} + \mathfrak{E}\mathfrak{N}^3(\mathfrak{t}-\tau))}\right) - \gamma\frac{N^m(t)}{H + N^2(0)}, \quad 2 < m < 3, \tag{5}$$

где γ – параметр эффективности биотического противодействия виду-вселенцу, что не сразу проявляется со стороны автохтонного окружения.

Предложенное уравнение можно использовать в составе «вольтерровских» систем для описания трофического взаимодействия с пороговыми эффектами. Предложенную функцию воздействия $F\big(N^m(t-\nu); J\big)$ можно включать в модель пилообразных колебаний вспышек вредителей для описания их демпфирования в случае существования ограниченного лесного ресурса и противодействия естественных врагов-паразитов.

Существуют интересные примеры кризисной динамики и вне области популяционных наблюдений. Так, в онкологии оставшиеся после подавления иммунотерапией опухолевые клетки могут вдруг снова переходить к стремительному делению, но эти сценарии являются темой отдельного исследования. Рассмотренный сценарий отличается от ситуации прохождения у вновь образующейся популяцией стадии длительного минимума при стабильной малочисленной группе особей с относительно малым r. Длительное состояние минимальной реликтовой группы принципиально отлично по эволюционным аспектам от перехода к резкому кризису с восстановлением. Увеличение численности $N(t) \to K$ в сценариях с длительным минимумом $N(t) \approx L$ связано с нарастанием репродуктивного потенциала, где $r \neq \text{const}$.

Литература

1. Переварюха А. Ю. *Запаздывание в регуляции популяционной динамики – модель клеточного автомата* // Динамические системы. 2017. Т. 7. № 2. С. 157–165.

КРИТЕРИИ УЧЕТА НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА В МНОГОФАКТОРНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

А.Ф. Проневич, Г.А. Хацкевич

Рассмотрим динамическую многофакторную производственную функцию (ПФ)

$$y = f(x, t) \quad \forall (x, t) \in D, \tag{1}$$

где y – выпуск продукции, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ есть вектор затрат производственных ресурсов, t – параметр времени из числового луча $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbb{R}_+$, экономическая область G из неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$.

В данной работе получены аналитические критерии того, что динамическая многофакторная ПФ (1) учитывает автономный экзогенный НТП [10, с. 83–85; 2; 3]. Способ доказательства основан на нахождении решений линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных. Так, например, критерий учета в ПФ (1) сберегающего по каждому фактору производства НТП, т.е. того, что ПФ (1) представима в аналитическом виде

$$f(x,t) = \widetilde{f}\big(A_1(t)\,x_1, \ldots, A_n(t)\,x_n\big), \tag{2}$$

где строго возрастающие функции A_i, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $A_1(0) = \ldots = A_n(0) = 1$, представляют собой индексы НТП по факторам производства, а многофакторная функция $\widetilde{f}$ является дважды непрерывно дифференцируемой на области G, описывает

Теорема 1. *Динамическая многофакторная ПФ (1) учитывает автономный экзогенный НТП в форме (2) тогда и только тогда, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по факторам производства, т.е. имеет место тождество*

$$\partial_t \ln f(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\,\varepsilon_{x_i}(f) \quad \forall (x,t) \in G' \times T' \subset G \times T,$$

где α_i есть некоторая скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t, а $\varepsilon_{x_i}(f) = \dfrac{x_i}{f(x,t)}\,\partial_{x_i} f(x,t)$ есть эластичность выпуска продукции по фактору x_i, $i = 1, \ldots, n$.

В случае, когда индексы НТП по факторам производства равны, т.е.

$$A_1(t) \equiv \ldots \equiv A_n(t),$$

из теоремы 1 получаем следующее

Следствие 1. *ПФ (1) учитывает автономный экзогенный НТП в форме (2) с равными индексами НТП по факторам производства, если и только если верно тождество*

$$\frac{\partial_t f(x,t)}{x_1\,\partial_{x_1} f(x,t) + x_2\,\partial_{x_2} f(x,t) + \ldots + x_n\,\partial_{x_n} f(x,t)} = \alpha(t) \quad \forall (x,t) \in G' \times T',$$

где α есть некоторая скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Работа выполнена при поддержке ГПНИ «*Общество и гуманитарная безопасность белорусского государства*» на 2021 – 2025 годы (НИР «*Разработка и применение эконометрических моделей развития малого и среднего предпринимательства в регионах для анализа и прогнозирования производства и экспорта товаров и услуг*, No. ГР 20211753»).

Литература

1. Иванилов Ю. П., Лотов А. В. *Математические модели в экономике.* М.: Наука, 1979.

2. Проневич А. Ф. *Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу* // Вестник института экономики НАН Беларуси. 2021. В. 2. С. 105–120.

3. Проневич А. Ф. *Трудодобавляющий научно-технический прогресс и нейтральность по Харроду* // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2021. В. 15. С. 236–246.

МЕТОД ГАУССОВА ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Т.В. Русилко, Д.А. Сальников

Сеть массового обслуживания (СеМО) – совокупность конечного числа взаимосвязанных систем или узлов массового обслуживания (СМО), в которой циркулируют заявки, переходящие в соответствии с маршрутной матрицей с выхода одной СМО на вход другой. Каждая отдельная СМО является функционально самостоятельной частью сети. Состояние сети в некоторый момент описывается совокупностью n случайных функций $\xi_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, т. е. случайным вектором

$$\xi(t)=\big(\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_n(t)\big)=\left(\frac{K_1(t)}{K},\frac{K_2(t)}{K},...,\frac{K_n(t)}{K}\right)$$

в n-мерном пространстве. Здесь $K_k(t)$ – это число заявок в k-й СМО в момент t, $t\in T$, K – общее число заявок в замкнутой сети.

Случайные процессы, описывающие состояние СеМО, являются многомерными, и их исследование является сложным. Хорошо разработана методика их исследования в стационарном режиме. Данная работа посвящена асимптотическому анализу при $K\to\infty$ экспоненциальных СеМО в переходном режиме [1]. Сеть называется *экспоненциальной*, если входные потоки пуассоновские, время обслуживания заявок в узлах распределено по экспоненциальному закону, заявки в узлах обслуживаются в порядке поступления, переходы заявок между СМО являются независимыми случайными событиями. Состояние экспоненциальной сети в асимптотическом случае большого числа заявок в ней описывается непрерывным марковским случайным процессом $\xi(t)=\big(\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_n(t)\big)$ и в ряде случаев удается доказать, что плотность распределения этого вектора при $K\to\infty$ удовлетворяет прямому уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова, принадлежащему к дифференциальным уравнениям параболического типа [2, 3]:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\big(A_k(x,t)p(x,t)\big)+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\big(B_{kj}(x,t)p(x,t)\big), \qquad (1)$$

где $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, в общем случае $x\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon=K^{-1}$;

$$A(x,t)=\big(A_1(x,t),A_2(x,t),...,A_n(x,t)\big)$$

– векторная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения значений исходного случайного процесса:

$$A_k(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}M\big(\xi_k(t+\Delta t)-\xi_k(t)\big);$$

$B(x,t) = \big(B_{kj}(x,t)\big)_{n\times n}$ – матричная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения дисперсии рассматриваемого случайного процесса:

$$B_{kj}(x,t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} M\Big(\big(\xi_k(t+\Delta t) - \xi_k(t)\big)\big(\xi_j(t+\Delta t) - \xi_j(t)\big)\Big).$$

В каждом конкретном случае устанавливается вид коэффициентов сноса $A_k(x,t)$ и диффузии $B_{kj}(x,t)$, $k,j=\overline{1,n}$. Как правило, они линейны по x [3, 4].

Решение (1) в многомерном случае является задачей большой сложности. Цель данной работы состоит в применении приближенного приема для решения (1). На основании физических соображений можно заранее ожидать определенный вид плотности вероятности $p(x,t)$. В частности, при определенных условиях плотность вероятности $p(x,t)$, являющаяся решением (1), будет нормальной или близкой к ней. Плотность нормального распределения системы $\xi(t) = \big(\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_n(t)\big)$ определяется начальными моментами первого порядка или математическими ожиданиями $\nu_k^{(1)}(t) = M\xi_k(t)$, характеризующими средние значения составляющих $\xi_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, и взаимными корреляционными функциями $\nu_{kj}^{(1,1)}(t) = M\big(\xi_k(t)\xi_j(t)\big)$, характеризующими связь процессов $\xi_k(t)$ и $\xi_j(t)$, $k,j=\overline{1,n}$.

Доказано, что названные выше характеристики в случае, когда $A_k(x,t)$, $B_{kj}(x,t)$ линейны по x, могут быть определены из системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4]:

$$\frac{d\nu_k^{(1)}(t)}{dt} = M\big(A_k(\xi(t),t)\big), \quad k=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\nu_{kj}^{(1,1)}(t)}{dt} = M\big(\xi_k(t)A_j(\xi(t),t)\big) + \\ + M\big(\xi_j(t)A_k(\xi(t),t)\big) + \varepsilon M\big(B_{kj}(\xi(t),t)\big), \quad k=\overline{1,n}, \ \ j=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{3}$$

Очевидно, что моменты второго порядка симметричны $\nu_{kj}^{(1,1)}(t) = \nu_{jk}^{(1,1)}(t)$, k,$j=\overline{1,n}$. Кроме того, если СеМО замкнута, то в ней циркулирует постоянное число заявок и, следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(t) = 1$ в каждый фиксированный момент времени. Поэтому для определения единственного решения (2), (3) при определенном начальном условии следует решать систему для $k=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{k,n-1}$, дополнив ее нормировочным условием $\sum_{k=1}^{n} \nu_k^{(1)}(t) = 1$.

Определив начальные моменты из системы (2), (3) и подставив их в известную функцию плотности нормального распределения, получим решение уравнения (1) в гауссовом приближении. На основе плотности $p(x,t)$ могут быть найдены вероятностно-временные характеристики функционирования сети массового обслуживания.

Литература

1. Маталыцкий М. А., Романюк Т. В. *Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения.* Гродно: ГрГУ, 2003.

2. Медведев Г. А. *Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 199-203.

3. Русилко Т. В. *Асимптотический анализ открытой сети массового обслуживания с ограниченным числом однотипных заявок двух классов* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2016. № 2. С. 152-161.

4. Русилко Т. В. *Метод определения моментов первых двух порядков для вектора состояния сети массового обслуживания в асимптотическом случае* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2021. Т. 11. № 2. С. 152-161.

СИСТЕМА РАЗНОСТНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕНАДЕЖНОЙ СЕТИ С АБСОЛЮТНЫМ ПРИОРИТЕТОМ В ОБСЛУЖИВАНИИ РАЗНОТИПНЫХ ЗАЯВОК

С.Э. Статкевич

Исследование сети массового обслуживания (МО) с очередями разнотипных заявок и абсолютным приоритетом их обслуживания приведено в [1]. Сети с ненадежными системами обслуживания и ограниченным временем ожидания разнотипных заявок исследованы в переходном режиме в [2].

В докладе рассматривается методика нахождения вероятностей состояний сети с ненадежными системами и абсолютным приоритетом в обслуживании нетерпеливых разнотипных заявок в переходном режиме. Доказано, что вероятности состояний такой сети удовлетворяют системе разностно-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dP_i(d,k,t)}{dt} = -\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}[\lambda(t)p_{0cic}\phi_{ic}(t) + \mu_{ic}\min(d_i,k_{ic})u(k_{ic})\alpha_{ic}(t)+$$

$$+\theta_{ic}(k_{ic}-d_i)u(k_{ic}-d_i)\nu_{ic}(t)] + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{\substack{c,s=1\\ c\neq s}}^{r}\mu_{js}(t)\min(d_j,k_{js})u(k_{js})\eta_{jsic}(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[\beta_i(t)d_i) + \gamma_i(t)(m_i-d_i)]\Bigg]P(d,k,t)+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}P(d,k-I_{ic},t)\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}p_{osjs}\psi_{jsic}(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}[\mu_{ic}\min(d_i,k_{ic})u(k_{ic})\alpha_{ic}(t)+\theta_{ic}(k_{ic}+1-d_i)u(k_{ic}+1-d_i)\nu_{ic}(t)]P(d,k+I_{ic},t)+$$

$$+\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\mu_{ic}(t)\min(d_i,k_{ic})u(k_{ic})\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\eta_{icjs}(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\theta_{ic}(t)(k_{ic}+1-d_i)u(k_{js})\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\nu_{icjs}(t)+\Bigg]P(d,k+I_{ic}-I_{js},t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)(d_i+1)P(d+I_i,k,t) + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-d_i+1)u(d_i)P(d-I_i,k,t),\ \ i=\overline{1,n},$$

где $(d,k,t) = (d_1,...d_n,k_{11},...,k_{1r},...,k_{n1},...,k_{nr},t)$ – вектор состояний сети; d_i – количество исправных линий обслуживания в системе S_i в момент времени t; m_i – общее число линий обслуживания в системе S_i; k_{ic} – количество заявок типа c в системе S_i в очереди и на обслуживании в момент времени t, $t\in[0;+\infty)$; $\mu_{ic}^{-1}(t)$, $\theta_{ic}^{-1}(t)$ – среднее время обслуживания и среднее время ожидания в очереди на обслуживание заявок типа c в системе S_i; β_i^{-1}, $\gamma_i^{-1}(t)$ – среднее время исправной работы и среднее время восстановления неисправных линий обслуживания соответственно в системе S_i; I_i – n-вектор с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером i, равной 1; I_{ic} – вектор нулевых компонент, размерности $n \times r$, за исключением компоненты $r(i-1)+c$, равной 1; $\phi_{ic}(k,t)$ – условная вероятность того, что заявка типа c, которая поступает в i-ую СМО в момент времени t, при условии, что сеть находится в состоянии (d,k,t), не будет обслужена ни одной из СМО; $\psi_{icjs}(k,t)$ – условная вероятность того, что заявка типа c, которая поступает из внешней среды в i-ую СМО в момент времени t, когда сеть находится в состоянии (d,k,t), впервые получит обслуживание в j-ой СМО, получив при этом тип s; $\alpha_{ic}(k,t)$ – условная вероятность того, что заявка типа c, обслуженная в i-ой СМО в момент времени t, когда сеть находится в состоянии (d,k,t), не будет больше обслужена ни в одной из СМО; $\eta_{icjs}(k,t)$ – условная вероятность того, что заявка типа c, обслуженная в i-ой СМО в момент времени t, когда сеть находится в состоянии (d,k,t), впервые после этого получит обслуживание в j-ой СМО, как заявка типа s; $\nu_{ic}(k,t)$ – условная вероятность того, что заявка типа c, находящаяся в очереди i-ой СМО в момент времени t, когда сеть находится в состоянии (d,k,t), не покинет очередь этой СМО, $i,j=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$.

Для решения данной системы предлагается использовать метод многомерных производящих функций.

Литература

1. Маталыцкий М. А., Науменко В. В. *Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок: моногр.* Гродно: ГрГУ, 2016.

2. Статкевич С. Э. *Исследование в переходном режиме сети с ненадежными системами обслуживания и ограниченным временем ожидания разнотипных заявок* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2021. Т. 11. № 3. С. 124–137.

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СИСТЕМ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

М.И. Тлеубергенов, Г.К. Василина, Д.С. Кулахметова

В работе по заданной стохастической системе строится эквивалентное почти наверное уравнение лагранжевой структуры в предположении, что на исходную систему наложены неголономные связи.

Известно, что в классической механике разработаны различные математические методы исследования консервативных систем. Гельмгольцем поставлена задача расширения области применения аналитических методов механики на случай непотенциальных сил. Им в классе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) получены [1] необходимые и достаточные условия построения обобщенного кинетического потенциала.

Вместе с тем в механике важным в приложении классом являются неголономные системы. Необходимые и достаточные условия справедливости принципа Гамильтона при наличии неголономных связей в потенциальном поле сил получены В.В. Румянцевым [2]. Исследованию задачи Гельмгольца с учетом неголономных связей в классе ОДУ посвящены также работы В.Р. Новоселова [3], А.С. Сумбатова [4] и др. авторов. Отметим работы [5-7], в которых помимо собственных исследований авторов, в основном, в классе ОДУ и ДУЧП, приводится исторический обзор научных работ по развитию и обобщению задачи Гельмгольца.

В данной работе задача Гельмгольца рассматривается при дополнительном предположении, что на неголономную механическую систему помимо непотенциальных сил действуют также случайные возмущающие силы типа белого шума.

Пусть положение натуральной неголономной стохастической системы определяется вектором обобщенных координат $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ и на скорости системы наложено k условий вида

$$\dot{q}_{m+\nu} - \alpha_{\nu i}\dot{q}_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ \nu = 1, 2, \dots, k), \tag{1}$$

где $\alpha_{\nu i} = \alpha_{\nu i}(q)$.

Предположим, что обобщенные возмущающие силы допускают представление

$$Q_s = Q_s^1 + Q_{sj}^2\,\dot{\xi}_{1/2}^j, \quad (s = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

где $\dot{\xi} = [\dot{\xi}_{1/2}^1, \dot{\xi}_{1/2}^2, \dots, \dot{\xi}_{1/2}^r]^T$ – вектор белых шумов в смысле Стратоновича [8].

Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Индексы i, l, α, β изменяются от 1 до m, индекс j – от 1 до r, а индексы μ, ν – от 1 до k.

Тогда, следуя [9, 10] с учетом вида обобщенных сил (2) и того, что белый шум задан в форме Стратоновича, получим стохастическое уравнение в форме Воронца вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = \Psi_{1i} + \Psi_{2i} + \sigma'_{ij}(q, \dot{q}, t)\,\dot{\xi}_{1/2}^j, \tag{3}$$

где

$$\Psi_{1i} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_{m+\nu}}\right)^{*}\alpha_{\nu i} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}\right)^{*}\beta_{il}^{\nu}\dot{q}_l, \quad \Psi_{2i} = Q_i^1 + Q_{m+\nu}^1\alpha_{\nu i}, \quad \sigma'_{ij} = Q_{ij}^2 + \alpha_{\nu i}Q_{m+\nu,j}^2,$$

$$\beta_{il}^{\nu} = \frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial q_l} + \frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial q_{m+\mu}}\alpha_{\mu l} - \frac{\partial \alpha_{\nu l}}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_{\nu l}}{\partial q_{m+\mu}}\alpha_{\mu i}$$

и звездочкой обозначен результат подстановки в соответствующие функции выражений (1) вместо $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$.

По заданному уравнению (3) требуется построить стохастическое уравнение лагранжевой структуры вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = \sigma'_{ij}(q, \dot{q}, t)\dot{\xi}_{1/2}^j. \tag{4}$$

Для решения задачи предположим, что функции $G_i = \Psi_{1i} + \Psi_{2i}$ удовлетворяют условию Гельмгольца [5]:

1) функции G_i линейны по скоростям, т.е. представимы в виде

$$G_i = \rho_{il}(q, t)\dot{q}_l + \mu_i(q, t), \tag{5}$$

при этом $\rho_{il}, \mu_i \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}), (q, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и

2) выполнены соотношения

$$\rho_{il} + \rho_{li} = 0, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial \rho_{il}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \rho_{l\alpha}}{\partial q_i} + \frac{\partial \rho_{\alpha i}}{\partial q_l} = 0, \tag{6b}$$

$$\frac{\partial \rho_{il}}{\partial t} = \frac{\partial \mu_i}{\partial q_l} - \frac{\partial \mu_l}{\partial q_i} \quad (i, l = 1,\ 2,\ \dots,\ m), \tag{6c}$$

что обеспечивает существование функции $\Pi = \Pi(q, \dot{q}, t)$ такой, что стохастическое уравнение (3) с помощью обобщенного кинетического потенциала $\hat{L} = L^* + \Pi$ будет эквивалентно уравнению (4).

Следовательно, имеет место следующая

Теорема. *Для приведения стохастического уравнения Воронца (3) к стохастическому уравнению лагранжевой структуры вида (4) необходимо и достаточно, чтобы функции $G_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяли условиям (5), (6a), (6b), (6c).*

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (Грант № AP09258966).

Литература

1. Гельмгольц Г. *О физическом значении принципа наименьшего действия* // Вариационные принципы механики. М., 1959. С. 430–459.

2. Румянцев В. В. *Об интегральных принципах для неголономных систем* // ПММ. 1982. Т. 42. № 1. С. 3–12.

3. Новоселов В. С. *Вариационные методы в механике.* Л., 1966.

4. Сумбатов А. С. *Неэкстремальность семейств кривых, определяемых динамическими уравнениями неголономных систем Чаплыгина* // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 11. № 5. С. 897–899.

5. Santilli R. M. *Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics.* Springer-Verlag, New-York. 1978.

6. Santilli R. M. *Foundation of Theoretical Mechanics. 2. Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics.* Springer-Verlag, New-York. 1983.

7. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. *Вариационные принципы для непотенциальных операторов* // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Новейшие достижения /ВИНИТИ. 1992. Т. 40. С. 3–178.

8. Стратонович Р. Л. *Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений* // Вестник МГУ. Серия математика, механика. 1964. № 1. С. 3–11.

9. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. *Динамика неголономных систем.* М., 1967.

10. Мощук Н. К., Синицын И. Н. *О стохастических неголономных системах* // ПММ. 1990. Т. 54. № 2. С. 213–223.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

Чебышевские итерационные процессы связаны с расположением спектра линейного оператора в сложных областях комплексной плоскости, например, в прямоугольнике. Такие итерационные процессы применяются при численном решении ряда прикладных задач. Важную роль при их построении играют экстремальные полиномы комплексного аргумента, наименее уклоняющиеся от нуля на квадрате комплексной плоскости, т. е. являющиеся аналогами полиномов Чебышева первого рода. В отличие от действительного случая, где давно известна общая формула

$$T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x),$$

получение экстремальных полиномов комплексного аргумента представляет собой трудную и до конца не решенную задачу.

Пусть D – квадрат с вершинами в точках $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Так, в начале XXI века Ю.В. Трубниковым были получены в аналитическом виде выражения рассматриваемых на данном квадрате экстремальных полиномов степеней со второй по шестую включительно (теорема 1).

Теорема 1. [1] *Экстремальными на квадрате D являются следующие полиномы*

$$P_1 = z, \quad P_2 = z^2, \quad P_3 = z^3, \quad P_4 = z^4 + 3/2,$$

$$P_5 = z^5 + \left(9 - 5\sqrt{2}\right) z, \quad P_6 = z^6 + (7/3)\, z^2.$$

Важную роль в теории оптимального приближения функции комплексного аргумента обычными и обобщенными полиномами играет следующая

Теорема 2. [2, с. 26] *Элемент $y \in G$ тогда и только тогда является элементом наилучшего приближения точки $x \notin G$, когда*

$$\exists \mu \big(\in \partial \|y - x\| \vee \in \partial \|x - y\|\big) \forall h\, (\in G)\, \mathrm{Re}\, \langle \mu, h \rangle = 0 \tag{1}$$

($\partial \|x\|$ *– субдифференциал нормы в точке* x, $\langle \mu, h \rangle$ *– значение функционала* μ *на векторе* h).

Таким образом, на основе критерия (1) можно сформулировать следующую схему построения экстремального (т.е. для которого достигается $\inf ||f - P_n||$) полинома:

1) исходя из некоторого расположения корней полинома P_n, определенного на прямоугольнике комплексной плоскости, найти систему точек, в которых достигается максимум модуля разности $f\,(z) - P_n\,(z)$; система таких точек является аналогом точек чебышевского альтернанса (e-точки);

2) решить систему уравнений

$$\mathrm{Re}\, \langle \mu, \varphi_k \rangle = 0 \;\; (k = 0, 1, ..., n)\,, \quad \varphi_k \in G,$$

$$\mathrm{Re}\, \langle \mu, f - P_n \rangle = \|f - P_n\|\,, \quad \mu \in \partial \|f - P_n\|.$$

В 2022 году авторами доклада доказана [3] экстремальность полинома седьмой степени

$$P_7 = z^7 + (1 + \sqrt{11}/2) z^3.$$

Перечислим основные трудности получения экстремальных полиномов высоких степеней по представленному алгоритму: 1) точное расположение e-точек заранее не известно, а их количество возрастает с увеличением степени полинома; 2) с увеличением степени полинома возрастает количество его неизвестных коэффициентов и корней. Например, количество e-точек полиномов P_4, P_5, P_6 равно восьми, у P_7 их 12, у P_8, P_9, P_{10}, P_{11} их 16.

Кратко рассмотрим численно-аналитическое построение полинома P_9. Учитывая симметрию и известный вид полиномов меньших степеней, P_9 ищем в виде

$$P_9\,(z) = z^9 + az^5 + bz.$$

Все e-точки расположены на границе области D. В силу симметрии достаточно рассмотреть одну сторону квадрата, например, верхнюю. Пусть

$$P_9 = (x + iy)^9 + a(x + iy)^5 + b\,(x + iy)\,.$$

Запишем квадрат модуля этого выражения при $y = 1$.

$$\begin{aligned} |P_9|^2_{|y=1} = {} & (x^{16} + 8x^{14} + (2a+28)\, x^{12} + (-4a+56)\, x^{10} + (a^2 - 34a + 2b + 70)\, x^8 + \\ & + (4a^2 - 56a - 56b + 56)\, x^6 + (6a^2 + (2b - 34)\, a + 140b + 28)\, x^4 + \\ & + (4a^2 + (-12b - 4)\, a - 56b + 8)\, x^2 + (a + b + 1)^2)\, (x^2 + 1). \end{aligned} \tag{2}$$

Предполагаем, что максимум квадрата модуля $|P_9|^2$ при $y = 1$ достигается в пяти точках, среди которых $x = 0$ и $x = 1$, т. е. $\max|P_9|^2 = 2(4a - b - 16)^2$. Подставляя это значение в (2), при $x = 0$ получаем, что

$$a_1 = \left(9 - 5\sqrt{2}\right)\left(b + 31 + 15\sqrt{2}\right)/31; \quad a_2 = \left(9 + 5\sqrt{2}\right)\left(b + 31 - 15\sqrt{2}\right)/31.$$

Одно из этих соотношений окажется справедливым, но проверить необходимо оба. Подставим первое значение a_1 в выражение (2). Далее необходимо найти от него производную с целью определения координаты «плавающей» между $x = 0$ и $x = 1$ e-точки, причем необходимо учесть, что значение квадрата модуля $|P_9|^2$ в этой точке также совпадает со значением в нуле. Таким образом, искомая координата e-точки является одним из корней алгебраического уравнения двенадцатой степени, которое заменой сводится к уравнению шестой степени. Его решаем численными методами. Таким образом, получаем тройку чисел

$$x_1 \approx 0,55455136583876287241;$$

$$a \approx 3,29779032550333796l3; \quad b \approx 0,78580851488163723679,$$

где все значащие цифры верные.

Остается проверить справедливость критерия (1). Занумеруем против часовой стрелки подряд идущие 16 e-точек, начиная с $z_1 = 1 + i$. Функционал μ действует следующим образом:

$$\langle \mu, g \rangle = (1/4,3829286808) \times \sum_{1 \leqslant k \leqslant 16} b_k Q_k g\left(z_k\right),$$

где Q_k $(k = 1, 2, ..., 16)$ – значения, сопряженные значениям полинома в e-точках z_k. Для значений b_k, $k = \overline{1,16}$, справедливы соотношения

$$b_1 = b_5 = b_9 = b_{13} \approx 0,05402104649, \quad b_3 = b_7 = b_{11} = b_{15} \approx 0,05235825753,$$

$$b_2 = b_4 = b_6 = b_8 = b_{10} = b_{12} = b_{14} = b_{16} \approx 0.07181034799.$$

Для случая, когда $a = a_2$, переопределенная система уравнений для нахождения коэффициентов b_k $(k = 1, 2, ..., 16)$ не имеет решения.

Таким образом, доказана экстремальность полинома

$$P_9\left(z\right) = z^9 + 3,29779032550333796l3z^5 + 0,78580851488163723679z.$$

Работа выполнена в рамках ГПНИ "Конвергенция–2025".

Литература

1. Трубников Ю. В. *О приближенных и точных полиномах типа Чебышева в комплексной области* // Таврический вестник информатики и математики. 2003. № 2. С. 45–56.

2. Трубников Ю. В. *Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями.* М.: Астропресс–XXI, 2002.

3. Чернявский М. М., Трубников Ю. В. *О численном методе нахождения экстремального полинома седьмой степени, определенного на квадрате комплексной плоскости* // 74 Региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников и аспирантов "Наука – образованию, производству, экономике". Витебск: ВГУ им. П. М. Машерова, 2022. С. 50–52.

ЭКРАНИРОВАНИЕ НИЗКОЧАСТОТНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОНКОСТЕННЫМ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМ ЭКРАНОМ

Г.Ч. Шушкевич

В условиях массового использования электротехнических, электронных и радиоэлектронных приборов и оборудования во всех сферах человеческой деятельности актуальной проблемой является электромагнитная безопасность окружающей среды и жизнедеятельности человека [1]. Для обеспечения благоприятной электромагнитной обстановки производится электромагнитное экранирование [2, 3]. Под экранированием понимается защита от воздействия внешних полей, локализация излучения каких-либо объектов с целью уменьшения его проявления в окружающей среде.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ находится тонкостенный эллипсоидальный экран Γ толщиной Δ. Область пространства внутри экрана Γ обозначим через D_1, внешнюю область по отношению к экрану Γ – D_2, область экрана Γ – D.

Тонкостенный экран Γ выполнен из материала с электромагнитными параметрами ε, μ, γ: ε – диэлектрическая проницаемость, μ – абсолютная магнитная проницаемость, γ – удельная электрическая проводимость. Область D_m, $m=1,2$, заполнена средой с магнитной проницаемостью μ_m.

В точке O_1, которая находится в области D_2, расположен источник поля – тонкая нить с бесконечно малым поперечным сечением, по которой циркулирует ток I.

В точках O, O_1 введем соответственно декартовы координаты $Oxyz$, $O_1x_1y_1z_1$ с одинаково направленными осями координат. Точка O_1 – центр эллипсоидального экрана Γ.

Декартовы координаты $Oxyz$, введенные в точке O, связаны с вытянутыми вырожденными эллипсоидальными координатами $O\alpha\beta\varphi$ соотношением

$$x = c\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta\cos\varphi, \quad y = c\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta\sin\varphi, \quad z = c\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta,$$

где $0 \leqslant \alpha < \infty$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, c – масштабный множитель, $c>0$, а декартовы координаты $O_1x_1y_1z_1$, введенные в точке O_1, связаны со сферическими координатами $O_1r_1\theta_1\varphi_1$ соотношением

$$x_1 = r_1\cos\varphi_1\sin\theta_1, \quad y_1 = r_1\sin\varphi_1\sin\theta_1, \quad z_1 = r_1\cos\theta_1,$$

где $0 \leqslant r_1 < \infty$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi$.

В результате взаимодействия первичного магнитного поля с экраном Γ образуются вторичные магнитные поля. Обозначим потенциал вторичного магнитного поля в области D_2 через U_2, в области D_1 – через U_1, потенциал исходного магнитного поля – через U_0.

В случае тонкостенных экранов магнитное поле внутри экрана не исследуется, а сшивается с помощью специальных граничных условий на срединной поверхности экрана Γ_c [4].

Срединная поверхность экрана Γ_c описывается в вытянутой вырожденной эллипсоидальной системе координат $O\alpha\beta\varphi$ следующим образом:

$$\Gamma_c = \{\,\alpha = \alpha_0 = \mathrm{Arch}(b/c),\ 0 \leqslant \beta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,\},$$

где b, a – большая и малая полуоси эллипса соответственно, $c=\sqrt{b^2-a^2}$.

Постановка задачи. Требуется найти скалярные магнитные потенциалы U_m в области D_m, $m=1,2$, которые удовлетворяют:

– уравнению Лапласа в системе координат $O\alpha\beta\varphi$

$$\Delta U_m = \frac{1}{c^2(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial U_m}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial U_m}{\partial\beta}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta}\right)\frac{\partial^2 U_m}{\partial^2\varphi}\right\} = 0; \qquad (1)$$

– граничным условиям на срединной поверхности Γ_c для тонкостенных слабо проводящих экранов [4]

$$\mu_2\frac{\partial\,(U_0+U_2)}{\partial\vec{n}} - \mu_1\frac{\partial U_1}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\Gamma_c} = -pF\,(U_0+U_2+U_1)|_{\Gamma_c}\,, \qquad (2)$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности Γ_c, $p=\mu\,\Delta/2$,

$$(U_0+U_2)|_{\Gamma_c} = U_1|_{\Gamma_c}\,; \qquad (3)$$

– условию на бесконечности

$$U_2(M)\to 0, \quad M\to\infty, \qquad (4)$$

где M – произвольная точка пространства.

Потенциал исходного магнитного поля представим в виде [3]

$$U_0(\,r_1,\,\theta_1,\phi_1) = P\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 P_1(\cos\theta_1), \quad P=\frac{M_z}{4\pi r_0^2},$$

где M_z – магнитный момент, $P_n(x)$ – полиномы Лежандра [5].

Согласно методу разделения переменных решение поставленной граничной задачи будем искать в виде суперпозиции эллипсоидальных гармонических функций так, чтобы выполнялось условие на бесконечности

$$U_1(\alpha,\beta,\varphi) = P\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=-s}^{s} Y_{sk}P_s^k(\operatorname{ch}\alpha)P_s^k(\cos\beta)\,e^{ik\varphi}, \qquad (5)$$

$$U_2(\alpha,\beta,\varphi) = P\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=-s}^{s} X_{sk}Q_s^k(\operatorname{ch}\alpha)P_s^k(\cos\beta)\,e^{ik\varphi}, \qquad (6)$$

где $P_s^k(\operatorname{ch}\alpha)$ и $Q_s^k(\operatorname{ch}\alpha)$ – присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно [3], $s=0,\,1,\,2,\,\ldots,$ $k=0,\,\pm 1,\,\pm 2,\,\ldots,\,\pm s$.

Используя соответствующие теоремы сложения, показано, что решение поставленной задачи (1)–(4) сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов, входящих в представления (5),(6).

Вычислен коэффициент экранирования исходного низкочастотного магнитного поля тонкостенным эллипсоидальным экраном.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований "Ковергенция - 2025"(подпрограмма "Математические модели и методы").

Литература

1. Задоя Н. И. *Электромагнитная безопасность.* Рубцовск: Рубцовский индустриальный институт, 2014.

2. Шапиро Д. Н. *Электромагнитное экранирование.* Долгопрудный: ИД Интеллект, 2010.

3. Шушкевич Г. Ч. *Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном в присутствии цилиндра* // Информатика. 2021. Т. 18. № 3. С. 45–55.

4. Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т. *Эквивалентные граничные условия в электродинамике.* СПб.: Безопасность, 1999.

5. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами* / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

GEOMETRIC APPROACH TO THE STUDY NAVIER-STOKES EQUATIONS

V.S. Dryuma

Theorem 1. *The* $14D$ *Riemann metric in local coordinates*

$$\vec{x} = (x,\, y,\, z,\, t,\, \eta,\, \rho,\, m,\, u,\, v,\, w,\, p,\, \xi,\, \chi,\, n):$$

$$\begin{aligned}
ds^2 &= 2\,dxdu + 2\,dydv + 2\,dzdw + \Big(-W(\vec{x},t)w - V(\vec{x},t)v - U(\vec{x},t)u\Big)dt^2 + \\
&+ \Big(-U(\vec{x},t)p - u\left(U(\vec{x},t)\right)^2 - uP(\vec{x},t) + w\mu\,\frac{\partial}{\partial z}U(\vec{x},t) - wU(\vec{x},t)W(\vec{x},t)\Big)d\eta^2 + \\
&+ \Big(v\mu\,\frac{\partial}{\partial y}U(\vec{x},t) - vU(\vec{x},t)V(\vec{x},t) + u\mu\,\frac{\partial}{\partial x}U(\vec{x},t)\Big)d\eta^2 + 2\,d\eta d\xi + 2\,d\rho d\chi + 2\,dmdn + \\
&+ \Big(-V(\vec{x},t)p - vP(\vec{x},t) - v\left((\vec{x},t)\right)^2 - V(\vec{x},t)W(\vec{x},t)w + v\mu\,\frac{\partial}{\partial y}V(\vec{x},t) - uU(\vec{x},t)V(\vec{x},t)\Big)d\rho^2 + \\
&+ \Big(u\mu\,\frac{\partial}{\partial x}V(\vec{x},t)\Big)d\rho^2 + \Big(-uU(\vec{x},t)W(\vec{x},t) - w\left(W(\vec{x},t)\right)^2 - wP(\vec{x},t) + w\mu\,\frac{\partial}{\partial z}W(\vec{x},t)\Big)dm^2 + \\
&+ \Big(v\mu\,\frac{\partial}{\partial y}W(\vec{x},t) - vV(\vec{x},t)W(\vec{x},t) + u\mu\,\frac{\partial}{\partial x}W(\vec{x},t) - W(\vec{x},t)p\Big)dm^2
\end{aligned} \tag{1}$$

is the Ricci-flat,

$$R_{44} = U_x + V_y + W_z = 0, \quad R_{55} = 0, \quad R_{66} = 0, \quad R_{77} = 0$$

on solutions of Navier-Stokes system of equations

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{Q}(\vec{x},t) + (\vec{Q}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla})\vec{Q}(\vec{x},t) - \mu\,\Delta\vec{Q}(\vec{x},t) + \vec{\nabla}P(\vec{x},t) = 0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{Q}(\vec{x},t) = 0, \tag{2}$$

where $\vec{Q}(\vec{x},t) = [U(\vec{x},t), V(\vec{x},t), W(\vec{x},t)]$ *are the components of velocity and* $P(\vec{x},t)$ *is pressure of liquid* (see e.g. [1-2]).

To obtain the metric (1) presentation the NS-system of equations in the form of laws conservations

$$U_t + (U^2 - \mu U_x + P)_x + (UV - \mu U_y)_y + (UW - \mu U_z)_z = 0,$$

$$V_t + (V^2 - \mu V_y + P)_y + (UV - \mu V_x)_x + (VW - \mu V_z)_z = 0,$$
$$W_t + (W^2 - \mu W_z + P)_z + (UW - \mu W_x)_x + (VW - \mu W_y)_y = 0,$$
$$(U_x + V_y + W_z) = 0,$$

is used.

The metric (1) belongs to the class of the Riemann spaces with vanishing scalar Invariants and part of its geodesics with respect to the coordinates $\eta, \rho, m, \xi, \chi, n$ has form of the equations

$$\ddot{\eta} = 0, \quad \ddot{\rho} = 0, \quad \ddot{m} = 0, \quad \ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\chi} = 0, \quad \ddot{n} = 0.$$

On the base of solutions of equations for the Killing vectors of the metric

$$K_{i,j} + K_{j,i} - 2\Gamma^k_{ij} K_k = 0, \quad \text{or} \quad K^k g_{ij,k} + g_{ik} K^k,\ j + g_{jk} K^k,\ i = 0, \tag{3}$$

a new examples of reductions and solutions of the system (2) are constructed.

Properties of the Lie derivative for the connection coefficients of the metric (1) and the vector field of the form $u^i = g^i_k v^k$

$$u^i_{j,k} + u^n \Gamma^i_{jk},_n + u^n_{,j} \Gamma^i_{nk} + u^n_{,k} \Gamma^i_{jn} - u^n_{,n} \Gamma^i_{jk} = 0,$$

where Γ^i_{jk}-are the coefficients of connection of the metric (1) with the aim of constructing new examples of solutions to the system (2) are discussed.

Another possibility for studying the properties of the NS system by the geometric method is the use of differential Beltrami parameters of the metric (1)

$$\Delta_2(f) = g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i, x_j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

As example, in particular case

$$f = \psi(x,\ y,\ z,\ t,\ 0,\ 0,\ 0,\ u,\ v,\ w,\ p,\ 0,\ 0,\ 0),$$

from solutions of the linear equation with variable coefficients

$$\Delta_2(f) = 0$$

the relation

$$\big(U(\vec{x},t) - W(\vec{x},t)\big) P(\vec{x},t)/\mu = U(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial z} U(\vec{x},t) - W(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x} V(\vec{x},t) -$$
$$- W(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x} U(\vec{x},t) - W(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x} W(\vec{x},t) + \frac{\partial}{\partial z} V(\vec{x},t) U((\vec{x},t)) + \frac{\partial}{\partial z} W(\vec{x},t) U(\vec{x},t),$$

between velocity and pressure can be derived and that can be applied to the studying properties of solutions of the system (2).

Theorem 2. *From auxiliary overdetermined linear system of partial differential equations for the function* $\Phi(\vec{x},t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i, \partial x_j} \Phi(\vec{x},t) = A(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(\vec{x},t) + B(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi(\vec{x},t) +$$
$$+ C(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x_k}\Phi(\vec{x},t) + E(\vec{x},t)\Phi(\vec{x},t); \tag{4}$$

with coefficients depended on the velocities $Q(\vec{x},t)$, the conditions and equations like of the form

$$\frac{\partial}{\partial y}U(\vec{x},t) =$$

$$= -\frac{\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}H(\vec{x},t))\frac{\partial}{\partial y}\Phi(\vec{x},t)+\frac{\partial^3}{\partial y\partial x\partial z}H(\vec{x},t)\Phi(\vec{x},t) -\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Phi(\vec{x},t)}{-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}}H(\vec{x},t)\Phi(\vec{x},t)+\frac{\partial}{\partial x}\Phi(\vec{x},t),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}U(\vec{x},t) = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}H(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial z}\Phi(\vec{x},t) + \Phi(\vec{x},t)\frac{\partial^3}{\partial z\partial x\partial z}H(\vec{x},t) - \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\Phi(\vec{x},t)}{-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}H(\vec{x},t)\Phi(\vec{x},t) + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\vec{x},t)}$$

and the equation

$$-\mu\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial z}H(\vec{x},t)-\mu\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial x\partial z}H(\vec{x},t)-\mu\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial x\partial z}H(\vec{x},t)-$$

$$-\frac{\partial^3}{\partial z\partial x\partial z}H(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial y}H(\vec{x},t)-\frac{\partial^3}{\partial z\partial x\partial z}H(\vec{x},t)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}H(\vec{x},t)+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}H(\vec{x},t)\frac{\partial^3}{\partial y\partial x\partial z}H(\vec{x},t)+U(x,y,z,t)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial z}H(\vec{x},t)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}P(\vec{x},t)+\frac{\partial^3}{\partial x\partial t\partial z}H(\vec{x},t) = 0$$

are performed.

Aknowledgement. The work is partially supported by NSF.

Refrences

1. Dryuma V. S. *On spaces related to the Navier-Stokes equations* // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica. 2010. V. 3(64). P. 107–110.

2. Dryuma V. S. *The Ricci-flat spaces related to the Navier-Stokes equations* // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica. 2012. V. 2(69). P. 99–102.

3. Dryuma V. S. *The Riemann and Einstein geometries in the theory of ODE's, their applications and all that* // New Trends in Integrability and Partial Solvability. Kluwer Publisher. (A.B. Shabat at al.(eds.)), 2004. P. 115–156.

OF SPECTRA OF THE ENERGY OPERATOR OF THE FOUR-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. QUINTET STATE. TWO- AND THREE-DIMENSIONAL CASE

S.M. Tashpulatov, R.T. Parmanova

The structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model in a quintet state in the one-dimensional case were studied in [1]. We consider the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the quintet state in two- and three-dimensional case. Hamiltonian of the system has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma}a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma}a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m}a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}+$$

$$+(A_0-A)\sum_{\gamma}a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0-U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \quad (1)$$

Here A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; B (B_0) is the transfer integral between electrons (between electron and impurity) in a neighboring sites (we assume that $B>0,\ B_0>0$), $\tau=\pm e_j,\ j=1,2,...,\nu,$ where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, correspondingly in the regular (impurity) lattice site; γ is the spin index, $\gamma=\uparrow$ or $\gamma=\downarrow$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m\in Z^\nu$, where Z^ν is a ν-dimensional integer lattice.

It is known that the Hamiltonian H acts in the antisymmetric complex Foc'k space $(\mathcal{H}_{as},(.)_{\mathcal{H}_{as}})$. Suppose that φ_0 is the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The quintet state corresponds to the free motion of four electrons over the lattice with the basic functions $q^2_{m,n,k,l\in Z^\nu}=a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$. The linear subspace $\mathcal{H}^q_2$, corresponding the quintet state is the set of all vectors of the form $\psi^q_2=\sum_{m,n,k,l\in Z^\nu}f(m,n,k,l)q^2_{m,n,k,l\in Z^\nu},\, f\in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2\big((Z^\nu)^4\big)$. We denote by H^q_2 the restriction of operator H to the subspace $\mathcal{H}^q_2$. We let $\varepsilon_1=A_0-A$, $\varepsilon_2=B_0-B$, and $\varepsilon_3=U_0-U$.

Let $\mathcal{F}\,:\,l_2((Z^\nu)^4\to L_2((T^\nu)^4\equiv\mathcal{H}^q_2$ be the Fourier transform, where T^ν is the ν-dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i.e. $\lambda(T^\nu)=1$. We set $\widetilde{H}^q_2=\mathcal{F}H^q_2\mathcal{F}^{-1}$.

Theorem 1. *The Fourier transform of operator H^q_2 is an operator $\widetilde{H}^q_2=\mathcal{F}H^q_2\mathcal{F}^{-1}$ acting in the space $L^{as}_2\big((T^\nu)^4\big)$ by the formula*

$$\widetilde{H}^q_2\,\psi^q_2=h(\lambda,\mu,\gamma,\theta)f(\lambda,\mu,\gamma,\theta)+$$

$$+\varepsilon_1\Big[\int\limits_{T^\nu}f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+\int\limits_{T^\nu}f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt+\int\limits_{T^\nu}f(\lambda,\mu,k,\theta)dk+\int\limits_{T^\nu}f(\lambda,\mu,\gamma,\xi)d\xi\Big]+$$

$$+2\varepsilon_2\Big[\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos s_i]f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\mu_i+\cos t_i]f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt+$$

$$+\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i+\cos k_i]f(\lambda,\mu,k,\theta)dk+\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\theta_i+\cos\xi_i]f(\lambda,\mu,\gamma,\xi)d\xi\Big],\qquad(2)$$

where $h(\lambda,\mu,\gamma,\theta)=4A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos\mu_i+\cos\gamma_i+\cos\theta_i]$, and L^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in $L_2\big((T^\nu)^4\big)$.

In the impurity Hubbard model, the spectral properties of the energy operator of four-electron systems are closely related to those of its two-particle subsystems (one-electron systems with impurity). Therefore, we first study the spectrum and localized impurity electron states of the one-electron impurity systems. Subsequently, using tensor products of Hilbert spaces and tensor products of operators in Hilbert spaces and taking into account that the function $f(\lambda,\mu,\gamma,\theta)$ is an antisymmetric function and using of results of investigation of spectra of one-electron systems with impurity, we describe the structure of essential spectrum and discrete spectrum of the energy operator of four electron systems in the impurity Hubbard model in the quintet state.

Theorem 2. *Let $\nu=2$. Then*

a). If $\varepsilon_2=-B$ and $\varepsilon_1<-4B$ (respectively, $\varepsilon_2=-B$ and $\varepsilon_1>4B$), then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}^q_2$ consists of the union of four segments:

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 16B, 4A + 16B] \cup [3A - 12B + z, 3A + 12B + z] \cup$$

$$\cup [2A - 8B + 2z, 2A + 8B + 2z] \cup [A - 4B + 3z, A + 4B + 3z],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *consists of a single eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4z\}$, *where* $z = A + \varepsilon_1$, *lying the below (respectively, above) of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

b). If $\varepsilon_1 < 0$ *and* $\varepsilon_2 = -2B$ *or* $\varepsilon_2 = 0$ *(respectively,* $\varepsilon_1 > 0$ *and* $\varepsilon_2 = -2B$ *or* $\varepsilon_2 = 0$ *), then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *consists of the union of four segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 16B, 4A + 16B] \cup [3A - 12B + \widetilde{z}, 3A + 12B + \widetilde{z}] \cup$$

$$\cup [2A - 8B + 2\widetilde{z}, 2A + 8B + 2\widetilde{z}] \cup [A - 4B + 3\widetilde{z}, A + 4B + 3\widetilde{z}],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *consists of a single eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4\widetilde{z}\}$, *where* $\widetilde{z}$, *same concrete real number, lying the below (respectively, above) of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

c). If $\varepsilon_1 = 0$ *and* $\varepsilon_2 > 0$ *or* $\varepsilon_1 = 0$ *and* $\varepsilon_2 < -2B$, *then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *consists of the union of ten segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 16B, 4A + 16B] \cup [3A - 12B + \widetilde{z}_1, 3A + 12B + \widetilde{z}_1] \cup$$

$$\cup [3A - 12B + \widetilde{z}_2, 3A + 12B + \widetilde{z}_2] \cup [2A - 8B + 2\widetilde{z}_1, 2A + 8B + 2\widetilde{z}_1] \cup$$

$$\cup [2A - 8B + 2\widetilde{z}_2, 2A + 8B + 2\widetilde{z}_2] \cup [2A - 8B + \widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2, 2A + 8B + \widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2] \cup$$

$$\cup [A - 4B + 3\widetilde{z}_1, A + 4B + 3\widetilde{z}_1] \cup [A - 4B + 3\widetilde{z}_2, A + 4B + 3\widetilde{z}_2] \cup$$

$$\cup [A - 4B + 2\widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2, A + 4B + 2\widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2] \cup [A - 4B + \widetilde{z}_1 + 2\widetilde{z}_2, A + 4B + \widetilde{z}_1 + 2\widetilde{z}_2],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *consists of a five eigenvalues:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4\widetilde{z}_1, 4\widetilde{z}_2, 3\widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2, \widetilde{z}_1 + 3\widetilde{z}_2, 2\widetilde{z}_1 + 2\widetilde{z}_2,\}$ *where* $\widetilde{z}_1$, *and* $\widetilde{z}_2$, *are same concrete real number, lying the outside of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

d). If $-2B < \varepsilon_2 < 0$, *then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *consists of a single segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 16B, 4A + 16B],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *is empty set:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \emptyset$.

Theorem 3. *Let* $\nu = 3$. *Then*

a). If $\varepsilon_2 = -B$ *and* $\varepsilon_1 < -6B$ *(respectively,* $\varepsilon_2 = -B$ *and* $\varepsilon_1 > 6B$ *), then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *consists of the union of four segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 16B, 4A + 16B] \cup [3A - 12B + z, 3A + 12B + z] \cup$$

$$\cup [2A - 8B + 2z, 2A + 8B + 2z] \cup [A - 4B + 3z, A + 4B + 3z],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *consists of a single eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4z\}$, *where* $z = A + \varepsilon_1$, *lying the below (respectively, above) of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

b). If $\varepsilon_1 < -\frac{6B}{W}$ *and* $\varepsilon_2 = -2B$ *or* $\varepsilon_2 = 0$ *(respectively,* $\varepsilon_1 > \dfrac{6B}{W}$ *and* $\varepsilon_2 = -2B$ *or* $\varepsilon_2 = 0$ *), then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *consists of the union of four segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 16B, 4A + 16B] \cup [3A - 12B + \widetilde{z}, 3A + 12B + \widetilde{z}] \cup$$

$$\cup [2A - 8B + 2\widetilde{z}, 2A + 8B + 2\widetilde{z}] \cup [A - 4B + 3\widetilde{z}, A + 4B + 3\widetilde{z}],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *consists of a single eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4\widetilde{z}\}$, *where* $\widetilde{z}$, *same concrete real number, and* $W \approx 1,516$, *lying the below (respectively, above) of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

c). If $\varepsilon_1 = 0$ *and* $\varepsilon_2 > 0$ *or* $\varepsilon_1 = 0$ *and* $\varepsilon_2 < -2B$, *and the condition* $EW < 36B^2$ *is implements, where* $E = \dfrac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}$, *then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *consists of the union of ten segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 16B, 4A + 16B] \cup [3A - 12B + \widetilde{z}_1, 3A + 12B + \widetilde{z}_1] \cup$$

$$\cup [3A - 12B + \widetilde{z}_2, 3A + 12B + \widetilde{z}_2] \cup [2A - 8B + 2\widetilde{z}_1, 2A + 8B + 2\widetilde{z}_1] \cup$$

$$\cup [2A - 8B + 2\widetilde{z}_2, 2A + 8B + 2\widetilde{z}_2] \cup [2A - 8B + \widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2, 2A + 8B + \widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2] \cup$$

$$\cup [A - 4B + 3\widetilde{z}_1, A + 4B + 3\widetilde{z}_1] \cup [A - 4B + 3\widetilde{z}_2, A + 4B + 3\widetilde{z}_2] \cup$$

$$\cup [A - 4B + 2\widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2, A + 4B + 2\widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2] \cup [A - 4B + \widetilde{z}_1 + 2\widetilde{z}_2, A + 4B + \widetilde{z}_1 + 2\widetilde{z}_2],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *consists of a five eigenvalues:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4\widetilde{z}_1, 4\widetilde{z}_2, 3\widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2, \widetilde{z}_1 + 3\widetilde{z}_2, 2\widetilde{z}_1 + 2\widetilde{z}_2, \}$ *where* $\widetilde{z}_1$, *and* $\widetilde{z}_2$, *are same concrete real number, lying the outside of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

Refrences

1. Tashpulatov S. M., Parmanova R. T. *Spectra of the Energy Operator of Four-Electron Systems in the Impurity Hubbard Model. Triplet State* // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2021. V. 9. № 11. P. 2776–2795.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА» НА ФАКУЛЬТЕТЕ РАДИОФИЗИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ БГУ

Л.Л. Березкина, А.Г. Гутор, А.А. Егоров

На факультетах университетов, готовящих студентов по физическим специальностям, в программу по высшей математике обязательно включается раздел «Элементы тензорного исчисления». На факультете радиофизики и компьютерных технологий этот раздел входит в программу курса «Аналитическая геометрия и линейная алгебра». Изучение тензорного исчисления, как правило, начинается с повторения отдельных тем линейной алгебры в новых, так называемых «тензорных» обозначениях. Переход к другим обозначениям по времени занимает одну лекцию, в течение которой новая информация не излагается. Это вызывает определенные сложности у студентов, в результате чего большинство из них к изучению тензоров так и не приступают. В связи с этим авторам показалось целесообразным перестроить курс линейной алгебры, начиная изложение материала с раздела «Линейные пространства» на основе индексной записи.

При введении понятия базиса линейного пространства условимся обозначать номера базисных векторов нижними индексами, а номера координат – верхними. Причина этого становится ясной после рассмотрения основного примера матрицы перехода – матрицы Якоби.

Предположим, что в области G трехмерного пространства задана криволинейная система координат (x^1, x^2, x^3). В каждой точке M_0 области G векторы $\vec{e}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}(M_0)$ образуют базис. Если задана криволинейная система координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, то возникает еще один базис $\vec{e}_{i'} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i'}}(M_0)$, причем

$$\vec{e}_{i'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\,\frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\,\frac{\partial x^3}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\vec{e}_i.$$

Таким образом, матрицей перехода от базиса $(\vec{e}_i)$ к базису $(\vec{e}_{i'})$ является матрица Якоби $T = (t^i_{i'})$, где $t^i_{i'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$. Заметим, что индекс i', номер базисного вектора, автоматически оказался внизу, под чертой, а индекс i, номер координаты, оказался над чертой, т. е. вверху.

При таком изложении основные формулы выводятся одним способом, логически вытекающим из определений и не требующим каких-либо искусственных приемов. Эти формулы также легко записываются без формального заучивания, а переход от записи основных законов в индексной форме к традиционной матричной осуществляется на основании «правила цепочки». Естественным образом возникают примеры тензоров, что объясняет необходимость введения этого понятия.

Начиная с 1998 года мы начали перестраивать изложение курса на основе использования индексной формы записи. В 2012 году в издательстве РИВШ вышло учебное пособие Л. Л. Березкиной «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» с грифом Министерства образования Республики Беларусь. Основной целью пособия была идея перехода к изложению линейной алгебры в тензорных обозначениях, что особенно важно для физических и радиофизических факультетов. В настоящее время готовится четвертое издание этой книги.

В своем докладе авторы планируют рассказать и о других особенностях преподавания вышеназванного курса. Так, например, при изложении теории кривых и поверхностей второго порядка приводится определение канонического уравнения второй степени, которое отсутствует в классических учебниках по аналитической геометрии. Это определение позволяет корректно обосновать классификацию кривых и поверхностей второго порядка. Для решения многих задач приведены четкие алгоритмы. В частности, при изложении темы «Собственные векторы» с полным обоснованием приводится метод алгебраических дополнений, который позволяет в случае простых корней легко находить собственные векторы, а для матриц третьего порядка – практически устно.

Для большей доступности изложения приводятся многочисленные примеры, причем многие из них являются нестандартными. Например, в теории линейных операторов предлагается вычисление интегралов вида

$$\int e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t - \beta e^{\alpha t}\cos\beta t) + C_1,$$

$$\int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\beta e^{\alpha t}\sin\beta t + \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t) + C_2,$$

а также решение некоторых интегральных уравнений.

Будут обсуждены актуальные вопросы, связанные с особенностями чтения лекций и проведения практических занятий на факультете радиофизики и компьютерных технологий с использованием ИКТ в условиях дистанционного обучения.

ОБ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ» ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ФАКУЛЬТЕТА РАДИОФИЗИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ БЕЛГОСУНИВЕРСИТЕТА

Л.Л. Березкина, А.А. Егоров

Дисциплина «Методы математической физики» традиционно преподается на факультете радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета и является последней в перечне общих математических дисциплин, читаемых на факультете. В связи с изменениями в учебных планах в следующем учебном году планируется существенное увеличение количества часов, отводимых как на лекции, так и на проведение практических занятий. Это дает возможность включить в программу дисциплины некоторые дополнительные темы. В частности, в работе [1] было указано на целесообразность рассмотрения на практических занятиях ряда математических моделей, связанных с явлением резонанса в задачах колебаний струн и стержней. В развитии этой идеи в настоящем сообщении обсуждается возможность дополнительного включения в учебную программу вопросов, связанных с построением по методу Фурье некоторых частных решений уравнения Гельмгольца, играющего важную роль в радиофизических приложениях.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в сферических координатах

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0,\quad 0\leqslant r<a,$$
$$u(a,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi),$$

предполагая, что число k не является собственным значением однородной краевой задачи

$$\Delta u+k^2u=0,\quad 0\leqslant r<a,\quad u(a,\theta,\varphi)=0.$$

Разделяя переменные в дифференциальном уравнении, приходим к ограниченным 2π-периодическим по φ частным решениям

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac12}(kr)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),\quad n=0,1,\ldots,\quad m=\overline{-n,n},$$

где $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi$, $Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi$ – сферические функции, $J_{n+\frac12}(x)$ – цилиндрические функции Бесселя полуцелого порядка.

Решение краевой задачи запишем в виде разложения по этим частным решениям

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac12}(kr)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

$$A_{nm}=\frac{\sqrt{a}}{J_{n+\frac12}(ka)}\frac{1}{\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}f(\theta,\varphi)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta,$$

$$\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2=\frac{2\pi}{2n+1}\frac{\bigl(n+|m|\bigr)!}{\bigl(n-|m|\bigr)!}.$$

Пусть теперь дана внутренняя краевая задача для уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0,\quad 0\leqslant r<a,$$
$$u(a,\varphi)=f(\varphi),$$

где функция $u=u(r,\varphi)$ не зависит от переменной z. Ограниченное 2π-периодическое по φ решение этой задачи имеет вид

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}J_0(kr)+\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\bigr)J_n(kr),$$

где коэффициенты A_n и B_n ряда вычисляются по формулам

$$A_n=\frac{1}{\pi J_n(ka)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\quad n=0,\,1,\,\ldots\,,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi J_n(ka)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Аналогично можно сформулировать краевые задачи для уравнения Гельмгольца в шаровом слое или кольцевой области и построить их решения в случае граничных условий второго и третьего рода.

Литература

1. Деревяго А. Н., Егоров А. А. *О дополнении к методике проведения практических занятий по дисциплине «Методы математической физики» на факультете радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета* // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям». Минск: ИМ НАН Беларуси, 2021. С. 239–242.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗЛОЖЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ» НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

А.Н. Деревяго, Н.Г. Абрашина-Жадаева

Методические подходы в преподавании математических дисциплин на физическом факультете имеют свою специфику, поскольку ориентируемы на приложения в научно-технических сферах. В этой связи особая роль принадлежит таким дисциплинам как «Методы математической физики» и «Математическое моделирование физических процессов».

Основная особенность курса «Методы математической физики» – широкое использование задач классической математической физики [1–5] и исследование этих задач с помощью теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и теории функций и приближенных методов, вычислительной математики и основ теории поля [6–8]. При этом немаловажно введение понятий обобщенной функции Дирака и обобщенных решений краевых задач, что позволяет часто формальным вычислениям придавать строгий математический смысл [5].

В своем сообщении мы также отмечаем некоторые важные особенности изложения для студентов-физиков темы решения задач Коши для уравнений гиперболического типа. Так, при изучении основных понятий и утверждений для дифференциальных уравнений второго порядка, мы обращаем особое внимание студентов не только на умение различать типы, но и важность выделять канонические переменные и характеристики или характеристические поверхности. Для каждого из типов дифференциальных уравнений в частных производных для выяснения характера решения учим использовать плоскость состояния или фазовую плоскость. При этом излагаем методику применения метода характеристик как переход к каноническим переменным в основном уравнении и нахождение общего решения через две произвольные функции $u = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где (ξ, η) – канонические переменные, и, используя начальные условия, находим аналитический вид этих функций в исходных переменных. Это стандартный прием [1–5], в котором мы на конкретных примерах акцентируем пошаговое внимание на характеристиках и на фазовой плоскости. Указываем, например, важные для физиков, замечания.

1. Поверхность $a^2(t-t_0)^2-|x-x_0|^2=0$ называется характеристическим конусом с вершиной в точке (x_0,t_0). Этот характеристический конус является границей конусов

$$\Gamma^+(x_0,t_0)=\Big[a(t-t_0)>|x-x_0|\Big],\quad \Gamma^-(x_0,t_0)=\Big[-a(t-t_0)>|x-x_0|\Big],$$

которые называются конусами будущего и прошлого с вершиной в точке (x_0,t_0) [5].

2. Волновое уравнение имеет и другое семейство характеристических поверхностей, а именно, семейство касательных плоскостей к характеристическим конусам $at+(x,b)=c$, где $b=(b_1,\ldots,b_n)$ и b_i, c – любые вещественные числа, причем $|b|=1$ [5].

3. Если рассматриваем уравнение с постоянными коэффициентами, то можно не приводить уравнение к каноническому виду, а искать решение в виде $u=\omega(x+\lambda y)$, где λ – некоторое число, подлежащее определению. Для этого в исходное уравнение подставляем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\omega'_x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\lambda\omega'_y,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\omega''_{xx},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial xy}=\lambda\omega''_{xy},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda^2\omega''_{yy}.$$

Замечание 3 демонстрируем на примере, при этом выделяя случаи, когда а) λ_1 и λ_2 различны и принадлежат $\mathbb{R}$, б) $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$, тогда решение записывается в виде

$$u=\omega(x+\lambda_1 y)+y\omega(x+\lambda_1 y).$$

Кроме того, отмечаем пригодность этого метода для дифференциальных уравнений в частных производных выше второго порядка. Так, например, для уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$$

имеем $\lambda_1=\lambda_2=i$, $\lambda_3=\lambda_4=-i$, и решение принимает вид

$$u_1=\omega_1(x+iy)+\omega_2(x-iy)+y\omega_3(x+iy)+y\omega_4(x-iy).$$

Важным дополнением при изложении уравнений параболического типа являются модели аномальной диффузии. Такие процессы вызывают интерес в связи с обнаружением аномальных свойств у ряда наноматериалов и наносистем и др. Рассматриваем макроскопический подход, который основан на использовании дробно-дифференциального уравнения, например,

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}=D(x)\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}+f(x,t),\quad 0<\beta<1,\quad 1<\alpha<2,$$

которое получается из классического путем замены производных на дробные. Здесь, как и в классике, $D(x)$, $f(x,t)$ имеют такой же физический смысл и ставятся обычные начальные и граничные условия. Дробные производные определяются различным образом (Вейля, Марше и др), например,

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_L^x\frac{v(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}},\quad n-1<\alpha\leqslant n,$$

где $L = 0$ – производная Римана-Лиувилля, $L = \infty$ – производная Лиувилля, $\Gamma(p)$ – Гамма-функция (см., например, [9, 10]).

Литература

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики.* М.: Высшая школа, 1970.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: МГУ, 1999.

3. Несис Е. И. *Методы математической физики.* М.: Просвещене, 1977.

4. Петровский И. Г. *Лекции об уравнениях с частными производными.* М.: Физматлит, 2009.

5. Владимиров В. С., Жаринов В. В. *Уравнения математической физики.* М.: Физматлит, 2000.

6. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимощенко И. А. *Векторный и тензорный анализ в примерах и задачах = Vector and Tensor Analysis through Examples and Exercises.* Минск: БГУ, 2019.

7. Ахраменко В. К. [и др.] *Высшая математика. Сборник задач: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2. Линейная алгебра. Анализ функций многих переменных.* Минск: БГУ, 2014.

8. Жадаева Н. Г. *Многокомпонентный вариант метода переменных направлений для эволюционных задач* // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 7. С. 1218–1230.

9. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987.

10. Abrashina-Zhadaeva N. G., Timoshchenko I. A. *Finite-difference schemes for a diffusion equation with fractional derivatives in a multidimensional domain* // Differential Equations. 2013. V. 49. № 7. P. 789–795.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ЭКЗАМЕНА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» У СТУДЕНТОВ-ПЕРВОКУРСНИКОВ ФГДЭ БНТУ

Е.Л. Ерошевская

Объективные изменения в системе высшего образования приводят к изменениям промежуточных форм и видов контроля и оценки знаний, умений и навыков студентов в техническом университете.

Одной из таких форм контроля является использование тестов. Переход от традиционных методов проведения контроля знаний, умений и навыков остается актуальным на сегодняшний день.

Курс математики для студентов-первокурсников на факультете горного дела и экологии БНТУ является одним из значимых, как по объему часов, так и по использованию при изучении специальных дисциплин в последующем обучении и составляет четыре семестра.

После окончания изучения тем первого семестра у студентов, согласно учебному плану изучения дисциплины, проводится экзамен. В качестве эксперимента экзамен нами был проведен с использованием тестовых заданий. В эксперименте участвовали все группы потока. Количество студентов составило 92 человека.

Тестовые задания в каждом из вариантов предлагаются в количестве десяти, и содержат, как практические задачи, так и теоретические вопросы. Каждое задание теста содержит по пять ответов, их которых только один является правильным. Варианты заданий распечатываются для каждого студента в бумажном варианте.

Студенты выполняют тест, после чего вводят полученные ответы в соответствующую их варианту Google-форму, используя компьютеры. Далее компьютерная программа производит проверку результатов и выдает количество правильно отмеченных ответов.

Указанное количество правильных ответов не соответствует окончательной экзаменационной оценке, потому что каждое тестовое задание имеет свой уровень сложности. При выставлении итоговой оценки для каждого правильного ответа вводится коэффициент, который позволяет либо увеличить количественный показатель результата, либо его уменьшить.

В случае, когда результаты тестирования оказываются отрицательными, мы проверяли работу студентов в ручном режиме. Так поступали с целью выставления объективной оценки. Для студентов это первый экзамен по дисциплине "Математика" и из-за волнения и неуверенности в себе возможны технические ошибки при выборе ответов.

Как показала непосредственная проверка работ, в большинстве случаев количество неудовлетворительных результатов было ошибочным. Студенты в процессе введения ответов делали ошибки и, как результат, полученные правильные ответы не были внесены. В результате компьютерной и непосредственной проверки неудовлетворительные оценки составили 11 процентов.

В заключении хочется отметить преимущества и недостатки проведенного эксперимента.

Несомненным преимуществом проведения экзамена в тестовой форме является его компактность. Весь процесс занимает не более часа. Также несомненным преимуществом данной формы экзамена является однотипность заданий и, как следствие, одинаковые условия проверки знаний, умений и навыков для всех студентов группы.

К недостаткам данного способа проведения экзамена можно отнести: зависимость процесса от использования сети Internet; случайность выбора ответа, а иногда, и неверного его выбора из предложенных; достаточно трудоемкий процесс составления тестовых заданий.

Таким образом, мы считаем, что тестовые задания могут использоваться при проведении семестрового экзамена.

О ПОСОБИИ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Н.И. Ильинкова, И.И. Рушнова, Т.А. Чехменок

Каждый преподаватель заинтересован в результатах своего труда, в том, насколько успешно и прочно усвоен пройденный материал. Это стимулирует поиск новых методик в преподавании дисциплины, привлечение в учебный процесс новейших технологий. Поэтому особенно важен обмен опытом между преподавателями разных учебных заведений, так как сколько преподавателей, столько и ответов на вопрос "как учить?". Особый интерес имеют материалы конференций, в которых представлены уже успешно апробированные в учебном процессе новшества с учетом конкретного вуза, специальности, дисциплины.

Основным источником получения знаний студентами, конечно же, являются лекции и практические занятия. Успешно же заниматься по индивидуальным планам в современных условиях могут очень немногие студенты. Вот почему особенно ценными являются любые методические находки, которые способны активизировать работу учащихся в течение семестра.

Сотрудниками кафедры высшей математики и математической физики физического факультета Белорусского государственного университета в целях повышения эффективности обучения на факультете радиофизики и компьютерных технологий внедрен в учебный процесс электронный учебно-методический комплекс по дисциплине "Математический анализ" [1]. Кроме того, попытки усовершенствовать учебный процесс, стимулировать самостоятельную работу студентов были реализованы в учебном пособии "Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной". Пособие написано на основе полного курса лекций по математическому анализу, читаемому авторами в первом семестре на факультете радиофизики и компьютерных технологий [2, 3]. В нем представлены фундаментальные понятия теории пределов, дифференцирования и интегрирования функций одной переменной, постижение которых обеспечит получение навыков, используемых при изучении смежных математических и физических курсов при решении прикладных и исследовательских задач. Пособие состоит из семи глав: «Введение», «Числовые последовательности», «Предел функции. Непрерывность», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», «Несобственные интегралы» и «Формула Тейлора. Исследование функций». Следует подчеркнуть, что, прежде всего, в пособии сделан упор на изложение теоретического материала. Также оно содержит достаточное количество примеров и подробно разобранных задач, которые предназначены для разъяснения того или иного момента, или же иллюстрируют стандартный метод решения. В конце каждой главы приводятся задания для самоконтроля в целях закрепления изученного материала, проверки степени усвоения основных понятий математического анализа. Кроме того, приводятся проверочные тесты (с верными ответами в конце пособия) по всем изложенным темам.

Данное учебное пособие выйдет в первой половине текущего года и, в первую очередь, предназначено для студентов факультета радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета и имеет целью повышение качества усвоения материала по математическому анализу, а также развитие самостоятельности и исследовательской активности у студентов. Кроме того, пособие будет полезно студентам высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области физики, техники и компьютерных технологий, в том числе для студентов специальностей, требующих хорошей математической подготовки, а также преподавателям высших учебных заведений.

Литература

1. *Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной*: электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 04 02 «Радиофизика», 1-31 04 03 «Физическая электроника», 1-31 04 04 «Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии», 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)», 1-31 03 07-02 «Прикладная информатика (информационные технологи телекоммуникационных систем)», 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», 1-98 01 01-02 «Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства)» / В. К. Ахраменко [и др.]; БГУ, Физический фак., каф. высшей математики и математической физики. Минск: БГУ, 2020. https://elib.bsu.by/handle/123456789/250914

2. *Математический анализ*: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 1-31 03 07-02 Прикладная информатика (информационные технологии телекоммуникационных систем), 1-98 01 01-02 Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства). №УД-10283/уч. https://elib.bsu.by/handle/123456789/275164

3. *Математический анализ*: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 1-31 04 02 Радиофизика; 1-31 04 03 Физическая электроника; 1-31 04 04 Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии. №УД-10282/уч. https://elib.bsu.by/handle/123456789/275169

РОЛЬ СКВОЗНЫХ ЗАДАЧ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

А.В. Капусто

Современное развитие информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) позволило значительно разнообразить формы и расширить возможности методов обучения математическим дисциплинам студентов технического и экономического профилей. Вместе с тем вопросы содержания и структурирования читаемых курсов, построения логики изложения и связности материала не теряют своей актуальности. При недостаточной продуманности содержания, слабых внутрипредметных и межпредметных связях, ИКТ не смогут обеспечить уровень знаний, соответствующий компетенциям, предъявляемым к студентам после изучения дисциплин [1].

Одним из методов, позволяющих создать целостность в представлении материала каждой из математических дисциплин вузовского образования, выступает метод сквозных задач, который впервые был представлен в работе Н. Я. Виленкина еще в конце 80-х годов прошлого века [2]. Данный метод позволяет сформировать «вертикальные» и «горизонтальные» сквозные линии, которые создают целостную картину как изучаемого учебного курса, так и его связи с другими учебными предметами.

Остановимся на примере сквозной задачи, которую можно использовать на четырех-пяти практических занятиях по разделу математического программирования для экономических специальностей.

Общая постановка задачи. Небольшое швейное ателье, помимо индивидуальных заказов, может также заключить договор на пошив спецодежды двух типов T_1 и T_2. Прибыль от пошива единицы спецодежды типа T_1 составит 10 ден.ед., T_2 – 12 ден.ед. Расход ткани составит, соответственно, 3 м.п. и 4 м.п., при имеющемся запасе в 75 м.п.; требуемое количество рабочей силы – 10 и 8 ч/часов при свободном ресурсе 200 ч/часов; количество единиц спецодежды типа T_2 не должно превышать 16 единиц.

Требуется:

1) составить математическую модель задачи;

2) решить ЗЛП (задачу линейного программирования), представляющую модель текстовой задачи, графическим методом и оценить полученный план как возможный вариант для заключения договора;

3) решить ЗЛП симплексным методом;

4) для прямой ЗЛП построить двойственную задачу и получить ее решение с использованием соответствия между переменными пары двойственных задач;

5) получить целочисленное решение прямой ЗЛП.

В результате последовательного выполнения заданий при решении данной задачи студенты: построят математическую модель задачи в форме ЗЛП; получат решение графическим методом, которое не будет удовлетворять условию целочисленности и, следовательно, не может стать оптимальным вариантом для заключения договора; отработают решение ЗЛП в симметричной форме симплексным методом; построят двойственную задачу и, используя решение прямой ЗЛП, получат ее решение, а также смогут пояснить экономический смысл; получат решение ЗЛП с учетом целочисленности, которое и определит оптимальный план исходной задачи. Из изученного ранее курса "Высшей математики" студентам потребуется вспомнить элементы аналитической геометрии (построение прямой и вектора на плоскости), физический смысл градиента и правила вычисления частных производных (функции нескольких переменных), транспонирование матриц (матричный анализ).

Таким образом, сквозные задачи позволяют, с одной стороны, проиллюстрировать "хронологию" продвижения по изучаемому курсу, с другой стороны, продемонстрировать связь с ранее изученными дисциплинами.

Литература

1. Капусто А. В., Кузнецова А. А. *Компетентностный подход в процессе обучения математике студентов строительных специальностей* // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия Е. Педагогические науки. 2015. № 7. С. 39–46.

2. Виленкин Н. Я. *Метод сквозных задач в школьном курсе математики* // Повышение эффективности обучения математике в школе. М.: Просвещение, 1989. С. 101–112.

О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НА ФАКУЛЬТЕТЕ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

О.А. Кастрица, С.А. Мазаник

Математический анализ всегда был важнейшей составляющей математического фундамента при подготовке специалистов на факультете прикладной математики и информатики БГУ. В первые годы работы факультета дисциплина "Математический анализ" преподавалась в течение четырех учебных семестров (136 аудиторных часов в каждом семестре). Функции комплексного переменного изучались как отдельная учебная дисциплина. В последующие годы наметилась тенденция сокращения количества учебных часов на преподавание математического анализа на ФПМИ БГУ. Самое большое сокращение произошло в момент перехода на четырехлетний цикл обучения. Так по специальности "Информатика" вместо 544 учебных часов на преподавание математического анализа осталось 408 учебных часов. В настоящее время в учебных планах специальностей ФПМИ учебная дисциплина "Математический анализ" отсутствует вообще (за исключением специальности "Прикладная информатика", где этой учебной дисциплине отведено 204 аудиторных часа в рамках модуля "Высшая математика"). Для остальных специальностей разделы математического анализа преподаются в рамках модуля "Математический анализ" (для специальностей "Информатика" и "Прикладная математика") и модуля "Высшая математика" (для специальностей "Актуарная математика", "Экономическая кибернетика" и "Компьютерная безопасность") как самостоятельные учебные дисциплины: "Дифференциальное и интегральное исчисление" (272 аудиторных часа для всех специальностей), "Функциональные последовательности и ряды" (72 аудиторных часа для специальности "Прикладная математика"), "Функциональные последовательности и ряды, несобственный интеграл" (72 аудиторных часа для специальностей "Информатика", "Актуарная математика", "Экономическая кибернетика" и "Компьютерная безопасность"), "Несобственные интегралы" (64 аудиторных часа для специальности "Прикладная математика"), "Теория функций комплексного переменного" (64 аудиторных часа для специальности "Прикладная математика"), "Ряды и функции комплексного переменного" (64 аудиторных часа для специальностей "Информатика", "Актуарная математика", "Экономическая кибернетика" и "Компьютерная безопасность"). Целесообразность подобного дробления курса сомнительна.

Такие изменения в учебных планах автоматически привели к необходимости разработки новых учебных программ и создания соответствующего методического обеспечения учебного процесса. В настоящее время на кафедре высшей математики БГУ подготовлены новые учебные программы по учебной дисциплине "Дифференциальное и интегральное исчисление" для всех специальностей. Кроме того подготовлен ряд методических разработок по отдельным разделам курсов, в частности, электронные издания [1–3] и электронный учебно-методический комплекс [4] для использования студентами в самостоятельной работе, роль которой несомненно возрастает в настоящее время из-за уменьшения аудиторных часов на изучение предмета.

Литература

1. Кастрица О. А. *Математический анализ. Конспект для студентов специальности 1-31 03 04 "Информатика" в трех частях. Ч. 1.* Минск: БГУ, 2017. http://elib.bsu.by/handle/123456789/182960

2. Кастрица О. А. *Математический анализ. Конспект для студентов специальности 1-31 03 04 "Информатика" в трех частях. Ч. 2.* Минск: БГУ, 2018. http://elib.bsu.by/handle/123456789/189174

3. Кастрица О. А. *Математический анализ. Конспект для студентов специальности 1-31 03 04 "Информатика" в трех частях. Ч. 3.* Минск: БГУ, 2018. http://elib.bsu.by/handle/123456789/192956

4. Мазаник С. А., Кастрица О. А. *Математический анализ: электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-31 03 04 "Информатика". В 3 ч./* БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, каф. высшей математики. – Минск: БГУ, 2021.
https://elib.bsu.by/handle /123456789/244693 https://elib.bsu.by/handle/123456789/252752 https://elib.bsu.by/handle/123456789/257817

ПРИКЛАДНОЙ АСПЕКТ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ КУРСА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ»

И.С. Козловская

Исторически математические модели, в основе которых лежат дифференциальные уравнения с частными производными, были разработаны для решения задач, описывающих физические процессы прежде всего в гидродинамике, аэромеханике и электродинамике. Поэтому в разнообразных приложениях, где находят широкое применение методы уравнений с частными производными, они получили название методы математической физики. Сейчас такие уравнения моделируют процессы различной природы: физические, химические, биологические, экологические, экономические и др. Эти методы применяются и для решения различных классов инженерных задач. Данный раздел математики отличается чрезвычайной информационной емкостью, что обусловлено тем, что в его основе лежат фундаментальные законы сохранения, связанные с симметрией пространства и времени. Именно благодаря этому, такие на первый взгляд принципиально различные процессы, как распространение тепла в сплошной среде, диффузия химических компонент, проникновение магнитного поля в хорошо проводящий материал и распространение волн эпидемий, описываются одинаковыми по форме уравнениями. В то же время при решении уравнений математической физики используются методы, разработанные в самых различных математических дисциплинах, таких, как математический анализ, теория функций комплексного переменного, вариационное исчисление, численные методы и т.д. Дифференциальные уравнения с частными производными образуют раздел математики, который теснейшим образом связывает общую математическую теорию с приложениями — например, к математической физике, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, механике, астрономии. Сегодня дифференциальные уравнения находят свое применение и в таких областях человеческой деятельности, которые, на первый взгляд, весьма далеки от математики — например, в медицине, криминалистике, социологии, генетике.

Поэтому при чтении лекций по курсу «Уравнения математической физики» и «Дифференциальные уравнения с частными производными» в качестве материала, иллюстрирующего возможности математического моделирования в различных ситуациях, активно используются примеры из практики обработки данных в процессе исследований в предметной области. Основная задача состоит в том, чтобы научить студента умению применять на практике методы решения задач, возникающих в прикладных вопросах, связанных с математическими модулями, которые описываются дифференциальными уравнениями с частными производными.

Задача, решаемая с помощью дифференциального уравнения, может быть кратко сформулирована как задача нахождения поведения объекта исследования в прошлом или предсказания его поведения в будущем, зная его положение в настоящий момент.

С другой стороны, большое внимание уделяется и решению такой проблемы, как помощь современных средств компьютерной математики в более глубоком понимании студентами изучаемых ими классических математических тем. Например, курс «Уравнения математической физики», имеющий дело с постановкой, исследованием и решением краевых задач для уравнений с частными производными эффективно дополнен лабораторными занятиями с использованием Wolfram Mathematica, что позволяет:

во-первых, студентам ознакомиться с графическими возможностями пакета Mathematica, позволяющими визуализировать векторные и скалярные поля;

во-вторых, с помощью Wolfram Mathematica эффективно проиллюстрировать решение одномерных уравнений и систем уравнений в частных производных;

в-третьих, имеющийся в пакете Wolfram Mathematica специализированный инструментарий позволяет решать двумерные задачи математической физики в режиме графического интерфейса.

Инструментарий включает в себя готовые средства решения задач диффузии, теплопроводности, электростатики, строительной механики и других областей математической физики. На лабораторных работах по курсу «Уравнения математической физики» пакет Wolfram Mathematica, в частности, используется для решения уравнений с частными производными методом характеристик и анимации полученного решения с помощью функций Plot и Manipulate при различных значениях параметров; для решения задач Коши и Гурса для уравнений с частными производными второго порядка и визуализации решения с помощью функции Plot3D; для визуализации процесса распространения тепла в стержне в зависимости от различных внешних условий; для построения эквипотенцальных поверхностей электромагнитных полей.

Использование указанного пакета повышает значимость курса уравнений математической физики как инструмента математического моделирования и демонстрирует современные принципы в программировании сложных научно-технических задач.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

О.А. Кононова, И.И. Рушнова, О.С. Кабанова

Дисциплина "Дифференциальные уравнения" является базовой в структуре образовательного процесса на физическом факультете Белорусского государственного университета (БГУ). Цель преподавания данной дисциплины заключается в формировании систематизированных знаний в области математического моделирования практико-ориентированных задач и их решение на основе классических методов и приемов решения дифференциальных уравнений [1].

На физическом факультете БГУ дисциплина "Дифференциальные уравнения" читается во втором семестре и составляет математическую основу общей и теоретической физики, а также физических спецкурсов, изучаемых на профильных кафедрах факультета. Курс включает в себя тематику, которая отражена в действующей учебной программе [2].

Преподавание дисциплины ведется с учетом межпредметного согласования и использования материала в других математических и физических дисциплинах. Изложение обыкновенных дифференциальных уравнений предполагает неразрывную связь между данной дисциплиной и задачами, описывающими эволюционные процессы в различных областях естествознания. На лекционных и практических занятиях подбираются и решаются типовые задачи, которые разъясняют основные идеи, понятия, теоретические факты и их практические применения. Ниже приведен типовой пример составления математической модели прикладной физической задачи.

Задача. Движение материальной точки. Рассмотрим материальную точку массой m, которая движется прямолинейно с начальной скоростью $\vec{v}_0$. На точку действует сила сопротивления $\vec{F}$, направленная в сторону, противоположную направлению движения, и равная по модулю $k\sqrt[3]{v}$, где k– размерный постоянный коэффициент. Нужно определить время t_1 от начала движения до момента остановки, а также соответствующий путь, пройденный материальной точкой.

Решение. Примем за ось OX прямую, вдоль которой происходит движение материальной точки, а начало координат – за исходное положение точки. Используя второй закон Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, запишем дифференциальное уравнение, описывающее движение материальной точки:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\sqrt[3]{v}.$$

Тогда, поскольку справедливо соотношение $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$, имеем цепочку равенств

$$m\frac{dv}{dt} = -k\sqrt[3]{v}, \quad mdv \cdot v^{-\frac{1}{3}} = -kdt, \quad \frac{3}{2}mv^{\frac{2}{3}} = -kt + C_1. \tag{1}$$

Поскольку материальная точка начала движение в момент времени $t = 0$ с начальной скоростью $v = v_0$, то

$$C_1 = \frac{3}{2}mv_0^{\frac{2}{3}}.$$

В этой связи скорость точки в момент времени t определяется уравнением

$$v^{\frac{2}{3}} = v_0^{\frac{2}{3}} - \frac{2kt}{3m}. \tag{2}$$

Из условия равенства нулю скорости материальной точки при остановке, найдем время ее движения: $t_1 = \frac{3mv_0^{\frac{2}{3}}}{2k}$. Из уравнения (2) выразим скорость материальной точки:

$$v = \frac{dx}{dt} = \left(v_0^{\frac{2}{3}} - \frac{2kt}{3m}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{3}$$

Выразим из дифференциального уравнения (3) координату x:

$$x = \left(v_0^{\frac{2}{3}} - \frac{2kt}{3m}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3m}{2k}\right) + C_2. \tag{4}$$

Таким образом, закон движения материальной точки примет вид:

$$x = -\frac{3m}{5k}\left(v_0^{\frac{2}{3}} - \frac{2kt}{3m}\right)^{\frac{5}{2}} + C_2. \tag{5}$$

Поскольку материальная точка начала свое движение в момент времени $t = 0$ из начала координат $x = 0$, то получим, что

$$C_2 = \frac{3mv_0^{\frac{5}{3}}}{5k}.$$

Окончательный вид закона движения:

$$x = \frac{3mv_0^{\frac{5}{3}}}{5k} - \frac{3m}{5k}\left(v_0^{\frac{2}{3}} - \frac{2kt}{3m}\right)^{\frac{5}{2}}. \tag{6}$$

Таким образом, путь, пройденный материальной точкой в момент остановки $t = t_1$, будет равен

$$x_{t=t_1} = \frac{3m}{5k} v_0^{\frac{5}{3}}, \tag{7}$$

Для повышения качества усвоения материала студентами лекционный материал сопровождается мультимедийным сопровождением, проводятся коллоквиумы, контрольные работы, компьютерное тестирование и онлайн-консультирование.

Литература

1. Шилин А. П. *Дифференциальные уравнения: Подробный разбор решений типовых примеров. 1800 примеров, собранных в многовариантные задания по важнейшим темам курса. Коллекция важнейших типов решений алгоритмического характера.* М.: ЛЕНАНД, 2017.

2. *Дифференциальные и интегральные уравнения*: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 1-31 04 06 Ядерные физика и технологии, 1-31 04 07 Физика наноматериалов и нанотехнологий, 1-31 04 01 Физика (по направлениям), 1-31 04 01-01 Физика (научно-исследовательская деятельность). УД-9985/уч.

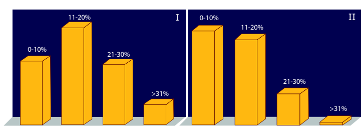
АДКРЫТЫ КАЛЁКВІЎМ ЯК ШМАТФУНКЦЫЯНАЛЬНАЯ ФОРМА КАНТРОЛЮ ВЕДАЎ У БУДУЧЫХ ФІЗІКАЎ

Н.С. Магонь, І.І. Рушнова, Н.Г. Абрашына-Жадаева

Для эфектыўнай ацэнкі вучэбна-пазнавальнай дзейнасці студэнтаў у вышэйшай школе выкарыстоўваюцца розныя метады кантролю ведаў: вусны кантроль, пісьмовы, тэставы, практычная праверка, метад назіранняў, а таксама метады самакантролю, самаацэнкі. Аднак, нягледзячы на шматгадовую апрабацыю, ужо сталыя традыцыйнымі метады і формы кантролю ведаў характарызуюцца некаторай недасканаласцю ў рэалізацыі. Напрыклад, вусны кантроль вызначаецца суб'ектыўнасцю адзнак, практычная праверка – не ўзнаўляльнасцю вынікаў праверак, пісьмовы кантроль – выкарыстаннем шпаргалак, а тэставанне не дазваляе ацаніць глыбіню разумення пытання, логіку мыслення, творчае ўжыванне засвоеных ведаў у новай сітуацыі. Атэстацыя ведаў студэнтаў у форме кантрольных работ, камп'ютарных тэстаў або традыцыйных калёквіумаў – устаялыя спосабы праверкі ступені засваення матэрыялу, якія, аднак, не заўсёды адлюстроўваюць узровень сапраўдных ведаў [1,2].

Удасканаленне метадаў навучання і форм кантролю ведаў, а таксама пошук новых спосабаў стымулявання самаадукацыі студэнтаў – найважнейшыя пытанні сучаснай методыкі выкладання вышэйшай матэматыкі [3]. З мэтай павышэння матывацыі да навучання і ўдасканалення самастойнага навучання ў 2020 годзе на кафедры вышэйшай матэматыкі і матэматычнай фізікі фізічнага факультэта Беларускага дзяржаўнага універсітэта былі ўведзены калёквіумы адкрытага тыпу (КАТ) па дысцыплінах: "Матэматычны аналіз", "Аналітычная геаметрыя і лінейная алгебра", "Асновы вектарнага і тэнзарнага аналізу", якія ўяўляюць сабой падрыхтаваныя невялікай групай студэнтаў (2 – 4 чалавекі) творчыя адказы на папярэдне зададзеныя пытанні эўрыстычнага тыпу ў выглядзе прэзентацыі або відэаролікаў. Варта адзначыць, што падрыхтаваныя адказы на пытанні КАТ дастаткова складана або не магчыма знайсці на прасторах інтэрнэту, што абумоўлівае неабходнасць азнаямлення з дадатковай літаратурай і ўдасканаленне самастойнай работы. Такім чынам, КАТ дазваляе развіць звычкі пошуку інфармацыі, яе структуравання, спрыяе паглыбленаму вывучэнню прадмета, а таксама дапамагае навучыцца прадстаўляць наглядна навуковыя вынікі, што з'яўляецца неад'емнай часткай навучальнага працэсу.

Калёквіўмы адкрытага тыпу па дысцыпліне "Аналітычная геаметрыя і лінейная алгебра" ў студэнтаў 1 курса фізічнага факультэта БДУ праводзяцца два разы за семестр: першы КАТ па аналітычнай геаметрыі, другі – па лінейнай алгебры. Пасля паспяховай здачы іспыту па дысцыпліне сярод 75 студэнтаў была праведзена ацэнка карэляцыі сярэдняй адзнакі за калёквіўм і адзнакі бягучай паспяховасці (Мал.1(I)), сярэдняй адзнакі за калёквіўм і адзнакі за іспыт (Мал. 1(II)). Для 63 студэнтаў (84%) розніца паміж адзнакамі бягучай паспяховасці і за КАТ не перавысіла 20%, для 33 студэнтаў розніца адзнакі бягучай паспяховасці і адзнакі за КАТ склала менш за 10%. Калі параўноўваць адзнакі атрыманыя за іспыт і адзнакі за КАТ, то 48 студэнтаў (64%) здалі іспыт з адзнакай, адрознай ад адзнакі за КАТ не больш за 20%. Добрае супадзенне адзнак паказвае, што КАТ з'яўляецца дастаткова эфектыўнай формай кантролю ведаў.



Мал. 1. Параўнанне адзнакі бягучай паспяховасці (I), адзнакі за іспыт (II) і адзнакі за КАТ.

Варта заўважыць, што такая форма кантролю ведаў з'яўляецца шматфункцыянальнай, паколькі спрыяе не толькі павышэнню ўзроўня ведаў, але і развівае звычкі пошуку навуковай інфармацыі, удасканальвае мастацтва красамоўства, актывізуе работу студэнтаў у камандзе. Дадзеная форма кантролю бягучай паспяховасці з'яўляецца не толькі прадуктыўнай для саманавучання студэнтаў, але і спрыяе паглыбленню і развіццю міждысцыплінарных сувязей.

Літаратура

1. Желнин М. Э., Кудинов В. А., Белоус Е. С. *Преимущества и недостатки тестирования в сравнении с другими методами контроля знаний* // Ученые записки: электронный научный журнал Курского государственного университета. 2012. № 1(21).

2. Грудзинская Е. Ю., Марико В. В. *Активные методы обучения в высшей школе* // Нижний Новгород, 2007.

3. Жунусакунова А. Д. *Методы контроля и оценки результатов обучения в учебном процессе* // Молодой ученый. 2016. № 20.1(124.1). С. 26–29.

О ЛЕКЦИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРЕЗЕНТАЦИЙ ПО ПРЕДМЕТАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦИКЛА

С.В. Майоровская

Важнейшими задачами преподавания математики в высшей школе являются поиск новых методов обучения и совершенствование уже разработанных классических. Мы стремимся к более эффективным способам передачи математических знаний, приобретения необходимых для практической работы навыков математического мышления. В этой связи представляется важным приобщение студента к самостоятельной работе, что достигается, в том числе, внедрением элементов дистанционного обучения в учебный процесс. Однако классические формы обучения – лекции, практические занятия, лабораторные работы актуальны и поныне. При этом лекция не теряет своего центрального положения в системе обучения. Ведь именно на лекции перед студентом раскрывается перспектива использования математических методов в деле познания мира. Здесь студент узнает, почему научная абстракция помогает познанию конкретного, как математика, являющаяся по меткому выражению Анри Пуанкаре, "искусством называть разные вещи одним и тем же именем", дает неограниченные возможности для использования не столь большого и вполне постижимого набора понятий и средств для изучения многих качественно различных явлений и процессов.

С учетом постепенной цифровизации образования учебный процесс в высших учебных заведениях давно принимает новые формы и, помимо по прежнему часто применяемого традиционного способа чтения лекций, сейчас широкое распространение получили лекции, основанные на заранее приготовленных компьютерных презентациях. Вопрос о преимуществах, недостатках и общей эффективности такого типа представления лекционного материала все еще остается дискуссионным. Традиционная лекция выполняет пять основных дидактических функций: информативную, методологическую, ориентирующую, стимулирующую и развивающую. Очевидно, что переход к презентационной лекции не должен сопровождаться потерей этих качеств.

Презентация как самостоятельный объект возникла в недрах маркетинговых и PR-технологий. Прототипами учебной презентационной лекции в вузе являются учебные фильмы, доклады на научных конференциях. Однако научный доклад ставит целью ознакомить профессионально подготовленную аудиторию с некоторыми достижениями докладчика, а маркетинговая презентация и вовсе, как правило, носит описательный характер – слайды содержат не более трех строк текста или одной-двух картинок. При этом ни один из рассмотренных прототипов не предполагает ведения конспекта, что совершенно необходимо на лекции по любой дисциплине математического цикла.

Проблема конспектирования является одной из ключевых проблем освоения научных знаний. В работе [3] описан эксперимент по воспроизведению содержания давно услышанной лекции. Лучше всех справились те, кто записывал ключевые тезисы. Самые же низкие показатели были у тех, кто не писал конспект. На традиционной лекции конспектировать студенту помогает преподаватель, напрямую указывая, что записать и как. Во время презентационной лекции процесс конспектирования усложняется: появляются два источника для составления конспекта – речь лектора и текст слайда. Студенты первого курса не умеют писать конспекты по математическим дисциплинам, этому их должен обучить лектор. В математике есть свои традиции, символика, специфические нотации. Часто приходится знакомить студентов со значением или переводом терминов, с правильным написанием и названием букв греческого алфавита и т.п. Всему перечисленному и многим полезным приемам конспектирования невозможно научить студента, просто демонстрируя ему слайд.

Серьезная проблема при проведении презентационной лекции состоит в несоответствии скорости устной речи и скорости записи. В работе [4] указано, что темп традиционной лекции с записями на доске составляет $342-375$ зн/мин. Темп же лекций при использовании преподавателем заранее приготовленных слайдов равен $612-835$ зн/мин. Средняя скорость записи материала во время обычного конспектирования текста составляет всего $50-60$ зн/мин. Итак, скорость изложения материала на лекции по презентации превышает скорость конспектирования в $10-16$ раз, что часто приводит к тому, что студент просто теряет нить изложения.

В силу специфики математических дисциплин эффективно визуализировать большую часть лекционного материала невозможно. Преподавателю приходится помещать на слайды много текста, наличие которого сразу усложняет восприятие. Ведь доступной является именно разговорная устная, а не озвученная письменная речь. Эксперименты показали (см. [5]), что при восприятии произнесенной вслух письменной речи слушатель воспроизводит впоследствии около 50% полученного сообщения, причем со значительными искажениями, а при таком же воспроизведении устной речи – около 90%.

Не секрет, что сегодня студентам не слишком присуща внутренняя профессиональная мотивация. Связанные со смартфонами привычки снижают аттенционные способности студенческой молодежи, склонность к самоконтролю и способность к обучению (см. [6]). Хорошая традиционная лекция по математике предполагает не просто изложение информации. Решения задач, доказательства теорем, рисунки, даже определения "рождаются" на доске постепенно, с паузами в нужных местах и участием наиболее вдумчивых слушателей. Презентационная же лекция как бы продолжает цифровой способ существования молодого человека. Мгновенно появляющиеся сложные формулы и картинки трудно осмыслить, поэтому большинство студентов неизбежно скатывается к пассивному восприятию, которое требует немногим более интеллектуальных усилий, нежели просмотр видеоролика.

Студенческая молодежь обладает сильной эмоциональной отзывчивостью, желанием проявить себя. Особую актуальность в связи с этим приобретают методы педагогического воздействия на личность студента. Перенасыщая презентационную лекцию наглядным материалом, лектор невольно отдаляет от студента самого себя со своим мощным обучающим и эмоциональным словом. Первокурсники особенно остро это чувствуют. Они невольно ожидают некоторого продолжения школьной опеки, участия и понимания со стороны преподавателя вуза. Если лектор остается в тени слайдов, плохо чувствует связь с аудиторией, где все вразнобой заняты своими делами (кто слушает, кто списывает со слайда, кто фотографирует слайд, а кто и просто присутствует), то и лекция, и процесс обучения в целом теряют смысл.

Итак, при чтении лекции в формате презентации следует особенно тщательно выбирать теоретический материал, который будет представлен на слайдах, а также его формат. Процесс показа должен быть четко хронометрирован. Аудитория, оборудование и оформление слайдов должны быть экологичны. При этом лектор не должен забывать, что студенты, особенно младших курсов, нуждаются во внимании преподавателя, демонстрирующего искреннюю заинтересованность в том, чтобы каждый обучающийся все понял, осмыслил и запомнил. Поэтому предпочтительнее совмещать (возможно, чередовать) презентационную и классическую формы подачи учебного материала.

Литература

1. Гнеденко Б. В. *О месте лекции в математическом образовании* // Математика в высшем образовании. 2004. № 2. С. 107–119.

2. Богомолова Е. П. *Презентационные лекции по дисциплинам естественно-научного цикла: практика и теория*. Открытое образование. 2014. № 4. С. 55–63.

3. Бьюзен Т. *Максимально используйте свой разум*. Минск: Попурри, 2007.

4. Минько Э. В. *Методы и техника ускоренного конспектирования и чтения*: учебно-методическое пособие. СПб.: СПБГУАП, 2001.

5. Тункель В. Д. *Прием и последующая передача речевого сообщения* // Вопросы психологии. 1964. № 4. С. 106–114.

6. Lee Y. K., Chang C. T., Lin Y., Cheng Z. H. *The dark side of smartphone usage: psychological traits, compulsive behavior and technostress. Computers in Human Behavior*. 2014. № 31. P. 373–383.

СТРУКТУРНО-ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ В ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

И.В. Марченко

Структурно-логические схемы по учебной дисциплине представляют собой один из вариантов схематизации учебного материала, выявление его структуры. Их можно использовать как средство реализации технологии крупноблочного изложения, основы которого были заложены в работах П. М. Эрдниева по технологии укрупнения дидактических единиц [1]. Первоначально предпосылками их использования в учебном процессе являлись систематизация и обобщение учебного материала, создание среды для реализации деятельностного подхода к обучению, активизация мыслительной деятельности обучаемых, т.е. конечной целью было осознанное активное восприятие новых знаний и их практическое применение.

В настоящее время, несмотря на то, что указанная цель не изменилась, возникает большое количество обстоятельств, делающих применение различных приемов крупноблочного обучения математике в высшей школе вынужденно-необходимым. К ним относится:

- систематическое увеличение доли самостоятельной работы студентов при изучении различных курсов, которое является несоизмеримым с долей совместной работы над материалом под руководством и при участии преподавателя. Конечный результат – не квалифицированный специалист, а ремесленник с дипломом;

- общая тенденция к сокращению аудиторных часов при сохранении объема учебного материала, а часто и его приросту. По имеющемуся уже опыту работы по новым учебным планам, можно сказать, что придерживаться учебной программы в этом случае можно либо перенеся большую часть тем на самостоятельное изучение (а это возможно только для подготовленных слушателей, но не для студентов первого курса), либо быстро, кратко и без особых пояснений и примеров излагая учебный материал;

- появление новых востребованных специальностей в сфере IT-технологий, которые требуют глубокого понимания и владения инструментарием различных математических дисциплин. Здесь отрицательными факторами выступают не только первые две тенденции, но и наличие заочной формы обучения. Студентам-заочникам, даже проработавшим материал самостоятельно, крайне важно увидеть его целостно, со всеми взаимосвязями.

Разработаны различные структурно-логические схемы, которые используются в обучении теории вероятностей и математической статистике студентов педагогических и инженерных специальностей.

В [2] предложена таблица, содержащая в себе 4 правила проверки различных гипотез о параметрах нормального распределения. Ее построение и использование основано на знании общего правила проверки параметрических гипотез и позволяет одним большим блоком выявить общее и различное в каждом отдельном правиле.

Построена структурная схема и для темы «Теоремы сложения и умножения», которая отражает взаимосвязи между ее основными понятиями и теоремами. Каждый уровень отражает последовательность введения материала, но за счет схематичного представления можно сразу сопоставить сходства и отличия между теоремами сложения и теоремами умножения, определить особенности их применения.

Структурно-логическая схема, иллюстрирующая аналогию между логическими операциями конъюнкции и дизъюнкции и комбинаторными правилами сложения и умножения, а также применения их при решении задач на классическое определение вероятности, описана в [3]. Она позволяет обучающимся понять общий подход к применению указанных комбинаторных правил при нахождении вероятности и обобщить его.

Приведенные структурно-логические схемы использовались автором в процессе преподавания теории вероятностей и математической статистики. Они позволяют существенно снизить временные затраты на изложение теоретического материала, используя при этом общенаучные методы познания.

Литература

1. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. *Укрупнение дидактических единиц в математике: книга для учителя.* М.: Просвещение, 1986.

2. Марченко И. В. *Об одном подходе к преподаванию темы «Статистические параметрические гипотезы»* // Научно-метод. конф. преподавателей и сотрудников по итогам научно-исслед. работы в 2009 г.: тез. докл., Могилев, 3–4 февраля 2010 г. / под ред. А. В. Иванова. Могилев: МГУ имени А. А. Кулешова. С. 122.

3. Марченко И. В. *Комбинаторное правило произведения в задачах по теории вероятностей* / И. В. Марченко // Правовые, экономические и социально-гуманитарные науки: Сборник научных трудов / Могилевский государственный университет продовольствия; БИП — Институт правоведения; ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при президенте РФ», Смоленский филиал; ред. кол. И. Ю. Тимофеева [и др]. Вып. 7. Могилев, 2021. С. 104–105.

К МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ В МОДУЛЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

А.П. Мателенок, В.С. Вакульчик, Т.И. Завистовская

Модуль «Дифференциальные уравнения» является одним из основных модулей курса высшей математики для специальностей механико-технологического факультета, поскольку он ориентируем на приложения в научно-технических сферах. Рассмотрим некоторые особенности его изучения для специальности 48 01 03 – «Химическая технология переработки природных энергоносителей и углеродных материалов».

В настоящее время на изучение этого модуля выделено 20 аудиторных часов (8 лекций и 12 практических занятий). За это время чаще всего преподавателю удается научить студентов классификации уравнений, выбору метода и получению общего или частного решения. Однако, к сожалению, времени, отведенного на рассмотрение разделов, формирующих навыки составления математической модели практико-ориентированной задачи в курсе дисциплины «Высшая математика» для студентов вышеуказанных специальностей, зачастую не хватает. В результате этого студенты в своей будущей профессиональной деятельности смогут лишь фрагментарно применить полученные по этим разделам математические знания для решения производственных задач.

Поэтому в УМК [1] для усиления мотивации студентов при самостоятельном решении подобных задач с рекомендациями преподавателя было внедрено специальное средство обучения «Фонд профессионально ориентированных заданий». Названный фонд включает задачи химико-технологического, экологического содержания, позволяющие продемонстрировать математический аппарат, вывод формул, необходимые для этого вычисления, создание математических моделей и их исследование.

Авторами были выделены требования по подбору и составлению задач для размещения их в «Фонде профессионально ориентированных заданий» по математике [2]:

1) профессионально ориентированное содержание задачи должно иметь узкоспециальный характер;

2) не следует выбирать задачи, излишне перегруженные трудными для понимания техническими и производственными сведениями и расчетами;

3) задачу с производственным содержанием необходимо рассматривать лишь тогда, когда студенты имеют достаточную математическую подготовку.

На лекции «*Приложения дифференциальных уравнений к задачам физики, химии и химической технологии*» преподаватель разбирает решение некоторых задач, демонстрируя принципы построения математической модели реальных процессов. Далее предлагает студентам, желающим заработать дополнительные баллы к экзаменационной оценке, решить несколько задач из фонда. При желании обучаемые могут обратиться к преподавателю за консультацией.

Решение задачи предполагает следующие этапы: изучение специализированной литературы (справочник по химии, математике), с целью нахождения формул, необходимых для решения; составление математической модели и алгоритма ее решения указанной задачи; выбор способа решения полученного уравнения; реализация выбранного метода в системах компьютерной алгебры; полное решение задачи; выводы.

Приведем пример следующего задания из «Фонда профессионально ориентированных заданий»: «Бак цилиндрической формы радиусом $0,75$ м и высотой $3,65$ м покрыт асбестовой изоляцией толщиной $0,051$ м, расположен вертикально на эстакаде и применяется для выдержки продуктов жидких отходов. Раствор поступает в бак при температуре 93℃. Температура окружающей среды 21℃. Рассчитать температуру продуктов выдержки через 5 суток. Справочные данные: $\gamma = 1018$ *кг/м*^{3} – плотность раствора, $c = 0,6$ *ккал/кг · град* – теплоемкость раствора» [3].

Отметим, что в дальнейшем студенты указанной специальности будут встречаться с дифференциальными уравнениями при изучении специальных дисциплин. Например, дисциплина «Процессы и аппараты химических технологий» при изучении тем «Основное уравнение гидростатики и его практические приложения», «Уравнение Бернулли»; дисциплина «Физическая химия» при изучении тем «Основное уравнение диффузионной кинетики», «Запись дифференциальных уравнений химической кинетики» и другие.

На наш взгляд, практическая готовность студентов к решению профессионально ориентированных заданий обеспечивает формирование у будущих инженеров потребности в самореализации и приумножении профессионального потенциала. Предлагаемая методика включения в УМК специального средства обучения «Фонда профессионально ориентированных заданий» при решении математических задач с применением теории дифференциальных уравнений служит реализации принципов преемственности, пролонгации, профессиональной направленности, развивающего обучения, отвечает требованиям непрерывности и целостности, единства и последовательности обучения студентов на выделенной специальности.

Литература

1. Вакульчик В. С., Мателенок А. П. *УМК как средство формирования познавательной самостоятельности в контексте компетентностной модели подготовки выпускника вуза*// Вестн. СПГУТД. 2018. № 2. С. 90–98.

2. Мателенок А. П. *Элементы эвристического обучения математике в компонентах УМК нового поколения* // Матэматыка. 2019. № 6. С. 45–52.

3. Вакульчик В. С., Мателенок А. П. *Формирование компетенций исследовательской деятельности студентов технических специальностей в математическом междисциплинарном модуле* // Выш. шк. 2021. № 1. С. 27–32.

АЛГОРИТМЫ И ТЕХНОЛОГИИ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫХ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ

Л.А. Пилипчук, М.П. Романчук

Двухкритериальными задачами называются типы задач, поиск решений которых проводится на основании двух критериев оптимизации. В рамках подхода [1–4] оба критерия влияют на выбор алгоритмических, структурных и технологических методов решения двухкритериальных задач. В статье рассматриваются двухкритериальные задачи, одним из критериев оптимизации которых являются задачи поиска кратчайших путей (путей минимальной стоимости).

Пусть имеется конечный ориентированный связный граф $G = (I, U)$, где I – множество узлов, U – множество дуг графа, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Обозначим $x = (x_{i,j},\ (i,j) \in U)$ – вектор дуговых потоков, где каждая дуга $(i,j) \in U$ имеет величину дугового потока $x_{i,j}$, стоимость перемещения единицы дугового потока $c_{i,j}$ по дуге $(i,j) \in U$ и пропускную способность $d_{i,j}$ (ширину) дуги $(i,j) \in U$. Определим ширину $d(L_{s,t})$ и стоимость $c(L_{s,t})$ пути $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t

следующим образом:

$$d(L_{s,t}) = \min\{d_{i,j}, (i,j) \in L_{s,t}\}, \quad c(L_{s,t}) = \sum_{(i,j)\in L_{s,t}} c_{i,j}x_{i,j}.$$

Для каждого $i = 1,\dots,k$ сформируем множества дуг $\tilde{U}^i$: $\tilde{U}^i = \bigcup_{j=1}^{i} U^j$.

Теорема 1. *Пусть $L^i_{s,t}$ –кратчайший путь в графе $G^i = (I,\tilde{U}^i)$ из узла s в достижимый узел t, $i \in \{1,\dots,k\}$. Если выполняются условия*

$$c\left(L^k_{s,t}\right) = c\left(L^{k-1}_{s,t}\right) = \dots = c\left(L^l_{s,t}\right) < c\left(L^{l-1}_{s,t}\right),$$

то путь $L^l_{s,t}$ имеет наибольшую ширину среди всех кратчайших путей из узла s в достижимый узел t в графе $G = (I,U)$.

Теорема 2. *Пусть $L^p_{s,t}$ – некоторый путь в графе $G^p = (I,\tilde{U}^p)$ из узла s в достижимый узел t, где $p \in \{1,\dots,h\}$. Пусть $L^p_{s,t}$ может быть не единственным в графе $G^p = (I,\tilde{U}^p)$. Если для ширины каждого пути $L^1_{s,t},\dots,L^p_{s,t}$ графа $G^p = (I,\tilde{U}^p)$ выполняются условия*

$$d\left(L^1_{s,t}\right) = d\left(L^2_{s,t}\right) = \dots = d\left(L^p_{s,t}\right) > d\left(L^{p+1}_{s,t}\right),$$

то $\{L^1_{s,t},\dots,L^p_{s,t}\}$ – множество путей максимальной ширины из узла s в достижимый узел t в начальном графе $G = (I,U)$.

Доказательства теорем 1–2 представлено в [1].

Для рассмотрения задачи (теорема 1) требуется иметь на входе алгоритма ориентированный ациклический граф, дуги которого характеризуются описанными выше дополнительными характеристиками – стоимостью и шириной. На основании теоремы 1 двухкритериальная задача отличается от задачи поиска кратчайших путей только тем, что поиск последних будет происходить не среди всех дуг графа, а только тех, которые входят в пути максимальной ширины. Следовательно, задача разбивается на две подзадачи, которые могут выполняться только последовательно.

Рассмотрим алгоритм решения задачи поиска кратчайшего пути среди путей максимальной ширины из начального узла s в конечный узел t в графе $G = (I,U)$, $s \in I$, $t \in I$:

Algorithm 1. Дуги графа $G = (I,U)$ сортируются в порядке невозрастания ширины и формируются множества дуг U^i, $i = \overline{1,k}$, таким образом, чтобы каждое множество содержало только дуги одной определенной ширины, то есть пересечение этих множеств есть пустое множество, а их объединение совпадает с множеством U, причем, для всякого $i = \overline{2,k}$ ширина любой дуги множества U^i меньше ширины любой дуги множества U^{i-1}.

1: Создаются множества $\tilde{U}^i$, $i = \overline{1,k}$ так, что $\tilde{U}^i = \bigcup_{j=1}^{i} U^j$
2: **for** $i = 1$ to k **do**
3: Строится граф $G^i = (I,\tilde{U}^i)$
4: Если в графе $G^i = (I,\tilde{U}^i)$ узел t достижим из узла s, то поиск специального графа G^i завершается, переход к шагу 6
5: **end for**
6: Для полученного графа $G^i = (I,\tilde{U}^i)$ решается задача поиска кратчайшего пути из узла s в узел t, причем шириной полученного пути является ширина, соответствующая дугам множества U^i.

На основе полученного пути можно вычислить дуговые потоки в графе, соответствующие решению задачи поиска кратчайшего пути среди путей максимальной ширины из начального узла s в конечный узел t. Для этого требуется положить потоки по дугам, принадлежащим найденному пути, равными единице, а потоки по всем остальным дугам – равными нулю.

Алгоритм решения задачи нахождения среди всех путей минимальной стоимости (кратчайших путей) из узла s в достижимый узел t графа G путей максимальной ширины основан на выполнении условий теоремы 2, при этом сортировка значений ширины каждой дуги осуществляется в порядке неубывания. Формирование множеств дуг U^i, $i = \overline{1,k}$, осуществляется таким образом, чтобы каждое множество было определенной ширины.

Математическая модель задачи о кратчайших путях из узла $s \in I$ в достижимые узлы $i \in I \backslash \{s\}$ графа $G = (I, U)$ имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min,$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} n-1, & i = s, \\ -1, & i \in I \backslash \{s\}, \end{cases}$$

$$0 \leqslant x_{i,j} \leqslant n, \quad (i,j) \in U, \quad n = |I|, \quad x_{i,j} \in \mathbb{N},$$

где $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}, \quad I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$.

Технологии построения кратчайших путей из узла s в узел t и из узла s во все достижимые узлы графа, основанные на базисном подходе, представлены в работе [2]. Подход, основанный на применении динамического программирования, представлен в работе [3].

Литература

1. Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н. *Двухкритериальные задачи потокового программирования* / // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2020. № 6(123). С. 144–150.

2. Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н. *Оптимальные пути: алгоритмические, структурные и технологические решения* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 3. С. 143—151.

3. Пилипчук Л. А., Полячок Е. Н. *О численных методах решения двухкритериальных задач потокового программирования* // Материалы 10-го международного семинара «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE)». Минск, 13–17 сентября 2021 г. – Институт математики НАН Беларуси. – Минск: ИВЦ Минфина, 2021. С. 67–68.

4. Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н. *К методам построения начальных допустимых решений экстремальных задач сетевой оптимизации* // Материалы международной научной конференции «Информационные технологии и системы -2020 (ИТС 2020)». Минск, 18 ноября 2020 г. – Минск: БГУИР, – 2020. С. 134–135.

КЛАССИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ, ЛЕЖАЩИЕ В ОСНОВЕ КУРСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.Я. Радыно

В курсе дифференциальных уравнений изучается широкий спектр непосредственно уравнений и методов их решения [1]. Предлагаем озвучить **фундаментальные принципы**, которые заложены как в уравнениях, так и в методах их решения, с целью определения отправных моментов методики преподавания курса дифференциальных уравнений.

Курс открывается линейными дифференциальными уравнениями первого порядка с постоянными коэффициентами. Это уравнения вида $r' = ar$, $x'(t) = ax(t) + f(t)$. Они являются простейшими моделями основных физических явлений: радиоактивного распада, падения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря, ослабление интенсивности излучения при прохождении его через поглощающую среду, ток размыкания, трение ремней, падение тела с высоты.

В основу изучения такого вида уравнений положен фундаментальный принцип или понятие – **«геометрическая прогрессия»**.

Далее рассматриваются линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами, в основе – **«сумма геометрических прогрессий»**.

Следующие в программе курса – линейные дифференциальные векторные уравнения с постоянными коэффициентами $\vec{x}\,' = A\vec{x}$. Метод решения таких уравнений основан на вычислении экспоненты матрицы. В этом случае применяется **«теорема Евклида о делении с остатком»**.

Обоснование существования и единственности задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ даётся с помощью теоремы Пикара, с использованием метода последовательных приближений. Базовый принцип — **«алгоритм Евклида»**.

Переходим к уравнению первого порядка в нормальной дифференциальной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Данное уравнение означает, что вектор (P, Q) ортогонален вектору (dx, dy). Вопросу ортогональности в курсе дифференциальных уравнений также посвящена задача И. Бернулли (о построении траекторий ортогональных данному однопараметрическому семейству линий). Кроме того, в курсе математического анализа в разделе «Функции комплексного переменного» рассматривается понятие дифференцируемости функции комплексного переменного. Следует обратить внимание, что функция комплексного переменного – это тот аппарат, который даёт два семейства ортогональных друг другу траекторий [2]. Указанные задачи дифференциальных уравнений и математического анализа практически применяются в электростатике и гидроаэродинамике. Во всех вышеназванных задачах проявляется принцип – **«силовые и эквипотенциальные линии»**.

Далее в курсе дифференциальных уравнений излагаются линейные уравнения с голоморфными коэффициентами и метод построения их решений при помощи степенных рядов. В основу решения положен принцип **«теорема Евклида о делении с остатком»**.

При изучении движения и устойчивости движения используют системы нелинейных дифференциальных уравнений и первые интегралы (законы сохранения). В этом случае применяется ряд принципов: **«основное свойство пропорций»**, **«интегралы движения»**, **«сведение системы дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений»**, **«силовые и эквипотенциальные линии»**.

В заключение курса изучается тема «Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка», в основе которой лежит принцип **«основное свойство пропорций»**.

Таким образом, изучая диффренциальные уравнения и методы их решения, студенты практикуются в использовании классических математических понятий и принципов: **«геометрическая прогрессия»**, **«теорема Евклида о делении с остатком»**, **«алгоритм Евклида»**, **«силовые и эквипотенциальные линии»**, **«основное свойство пропорций»**.

Литература

1. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* Москва, ГТТИ, Физматлит, 1950.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* Москва, ГИФМЛ, 1958.

ОБ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФАКУЛЬТЕТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ БГУ

Г.П. Размыслович, А.В. Филипцов

Роль аналитической геометрии в системе высшего образования весьма значительна. Наряду с тем, что эта дисциплина имеет большое самостоятельное теоретическое и прикладное значение, без неё невозможно построить курсы математического анализа, дифференциальных уравнений, дискретной математики, компьютерной графики и др.

В вступивших в действие в 2021 году образовательных стандартах и типовых учебных планах специальностей «Прикладная математика», «Информатика», «Актуарная математика» и направлений специальностей «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование)», «Компьютерная безопасность (математические методы и программные средства)» изучение основ аналитической геометрии выделено в самостоятельную дисциплину. В связи с этим авторами разработаны учебные программы по дисциплине «Аналитическая геометрия» для указанных выше специальностей, а также отвечающее этим программам учебное пособие. Данное пособие отражает практику проведённых авторами занятий по аналитической геометрии на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. Основу данного издания составляют учебные пособия [1, 2].

Учебное пособие «Аналитическая геометрия» состоит из двух частей. В первой части рассматриваются системы координат на прямой, плоскости и в пространстве, изложена теория векторов. Вторая часть посвящена изучению алгебраических линий первого и второго порядков на плоскости, а также прямых, плоскостей и алгебраических поверхностей второго порядка в пространстве. В пособии вводятся основные понятия аналитической геометрии и их свойства, сформулированы и доказаны наиболее важные утверждения, использующие эти понятия, а также представлено большое количество рисунков, которые подтверждают и иллюстрируют основные положения аналитической геометрии.

Литература

1. Размыслович Г. П., Феденя М. М., Ширяев В. М. *Геометрия и алгебра.* Минск. БГУ. 1987.

2. Размыслович Г. П., Филипцов А. В., Ширяев В. М. *Геометрия и алгебра. Практикум.* Минск. БГУ. 2018.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ МОТИВАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ БАКАЛАВРОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА

Е.Л. Старовойтова

Обновление целей профессионального образования в высшей школе требует совершенствования методики обучения и организации образовательного процесса на основе технологий, применение которых обеспечит не только формирование базы фундаментальных знаний и умений, но и будет способствовать развитию личности, ее творческой индивидуальности. В психолого-педагогических исследованиях по проблемам высшей школы вопросы повышения качества обучения рассматриваются в разных направлениях, одним из которых является изучение факторов, способствующих развитию мотивации при организации предметного обучения. Проблема мотивации, рассматриваемая, в частности, не только как элемент учебной деятельности, но и как специальный метод стимулирования обучения, особо значима при обучении математике в техническом вузе в силу особенностей математической деятельности, продуктивность которой во многом зависит от мотивационной направленности как совокупности причин, обуславливающих возникновение этой деятельности, выбор ее направления и способов осуществления. Исходя из этого, могут быть охарактеризованы методические приемы, усиливающие определенные стороны мотивации, приемы, направленные на формирование мотивации при организации различных видов занятий, а также приемы развития мотивации на отдельных этапах занятий по математике.

Математические задачи рассматриваются как цель и средство обучения. В.В. Сериков, отмечая, что «задача – это системный объект, основными компонентами которого являются содержание задачи (предмет задачи, условия и требования), средства решения (методы, способы)» [1, с.73], считает, что обучающийся включается в решение лишь той задачи, в которой он находит тот или иной личностно-значимый смысл. Задачи составляют основу реализации методических приемов формирования мотивации изучения математики, при этом приоритетными оказываются их дидактические функции. Рассмотрим их подробнее.

Для педагогов и методистов значимым является вопрос о месте мотивации в процессе обучения и о возможных способах мотивации учебной деятельности. Методический прием, направленный на создание у обучающихся установки на необходимость подготовки к изучению нового материала, может быть реализован с использованием подготовительных задач, которые, во-первых, позволяют актуализировать знания студентов, вспомнить ранее изученные теоретические сведения, необходимые для изучения нового материала, и, во-вторых, задач, обозначающих проблему, решение которой требуется при изучении нового материала.

Так, например, в начале изучения раздела «Линейная алгебра», в котором много аксиоматических определений понятий, трудно усваиваемых студентами, можно использовать как подготовительную, задачу следующего содержания: «Предприятие выпускает три типа продукции, используя четыре вида ресурсов. Распределение ресурсов (у.д.е.) на производство единицы продукции каждого типа задается числами: $2, 5$ и 3 – для первого вида, $0, 1, 8$ – для второго вида, $1, 3, 1$ – для третьего вида и $2, 2, 3$ – для четвертого вида ресурсов. За определенный промежуток времени выпущено 100 ед. продукции первого типа, 80 ед. – второго типа и 11 ед. – третьего типа. Стоимость единицы ресурса первого вида составляет 10 у.д.е., для ресурсов второго, третьего и четвертого видов — соответственно 20, 10, 10 у.д.е. Определить полную стоимость всех затраченных за данный промежуток времени ресурсов». К первому практическому занятию этого раздела студентам предлагается найти решение этой текстовой задачи школьными средствами, а его обсуждение позволит найти новые средства решения, оценить их преимущества, ввести основные понятия изучаемой темы, термины, их обозначения и запись, действия (матрица, строки, столбцы, элементы, виды матриц и т.д.).

Направляющая функция мотивации реализуется через формирование и осознание обучающимися конкретной цели деятельности, позволяя им осуществить выбор определенной линии поведения [2]. Мотивация поисковой деятельности студентов эффективна при сформированности у них понимания факта, что изучаемыми математическими объектами (матрицами, производными, дифференциальными уравнениями и др.) моделируются реальные процессы природы. Это достигается при использовании методического приема истолкования и раскрытия потенциала моделирования в формировании профессионально значимых умений и навыков обучающихся: во-первых, при рассмотрении математического моделирование как учебного действия по изучению построенных моделей и, во-вторых, при реализации междисциплинарности обучения за счет интеграции научных знаний математики и других учебных дисциплин. Например, рассматривая приложения дифференциального исчисления при решении задачи «Определить размеры открытого бассейна квадратной формы объемом 32 м^3 таким образом, чтобы на отделку его дна и стен использовалось наименьшее количество отделочных материалов», студенты самостоятельно осуществляют поисковую деятельность по построению модели решения, используя опыт нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции, применяя знания в новой ситуации.

Мотивация поисковой деятельности студентов при изучении вопроса о наибольшем и наименьшем значении функции усиливается при формировании у студентов представлений о развитии и уточнении построенной математической модели. Классическая задача «Требуется огородить участок прямоугольной формы наибольшей площади имеющейся для этого сеткой длиной l. Найти размеры участка» может быть сопровождена дополнительными условиями, соответствующими реальной ситуации, например, наличие на территории дополнительных построек, предполагающих особые варианты расположения объекта на ограждаемой территории. В этом случае особое внимание уделяется возможной динамичности процесса математического моделирования при определении оптимальных размеров участка. Такая работа не может проводиться на занятиях часто в силу ограниченности времени на изучение математики, однако обсудить возможности такого подхода к решению задачи целесообразно.

Мотивационную направленность курса математики на этапе изучения дифференциальных уравнений (первый курс) усиливает решение прикладных задач, предваряющих теоретический материал. Так, задачей «По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. В комнате с температурой воздуха 20°C кирпич остывает за 20 мин со 150°C до 110°C. Найти закон охлаждения кирпича. Через сколько времени температура вынутого кирпича понизится до 30°C? Повышением температуры в комнате пренебречь» можно мотивировать возможность и целесообразность перевода задачи на язык новой теории, обосновать вводимые понятия, раскрыть их смысл, ввести обозначения, сформировав первоначальные представления о роли, которую играют дифференциальные уравнения в математике и естествознании. Мотивируя студентов на успешное решение прикладных задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, важно определить два этапа в работе над такими задачами: творческий (составление дифференциального уравнения) и технический (решение уравнения).

Представленные методические приемы не только развивают учебную мотивацию студентов к изучению математики, но и способствуют положительному отношению их к математике как значимой для будущей профессиональной деятельности учебной дисциплине, формируют целостную систему профессионально значимых математических знаний и операционных умений, а также повышают уровень личностного и профессионального становления студентов технического вуза.

Литература

1. Сериков В. В. *Обучение как вид педагогической деятельности* / Под ред. В.А. Сластенина, И. А. Колесниковой. М.: Академия, 2008.
2. Ильин Е. П. *Мотивация и мотивы.* СПб.: Питер, 2008.

QR-КОДИРОВАНИЕ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА»

Я.С. Судник, Е.А. Овсяник, И.И. Рушнова, Н.Г. Абрашина-Жадаева

QR-кодирование на занятиях становится отличным подспорьем традиционным приемам изложения различных тем и дает возможность наглядно продемонстрировать теоретические выкладки. В этом случае даже сложные темы могут быть увлекательными и интересными [1]. Использование QR-кодов в учебниках и методических разработках создают благоприятную среду для небольшого исследования, например, как с помощью QR-кода для нахождения собственных значений и собственных векторов можно построить алгоритм нахождения канонического уравнения для кривых и поверхностей второго порядка [2–4]. Эта нестандартная ситуация помогает не только лучше закрепить пройденный материал, но и продолжить исследования. Совместно со студентами физического факультета был создан такой тренажерный QR-код.

QR-код используется в качестве ссылки на портал физического факультета Белорусского государственного университета, где размещается программа, созданная в среде программирования Delphi. Программа имеет практическую направленность и нацелена на демонстрацию нахождения собственных и присоединенных к ним векторов для линейного оператора в действительном или комплексном поле. Оператору ставится в соответствие некоторая матрица третьего порядка.

Следуя правилу нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора, на первом шаге программа находит характеристический многочлен матрицы методом алгебраических дополнений и далее представляет характеристическое уравнение матрицы в виде кубического уравнения относительно λ. На втором шаге программа находит все характеристические числа матрицы и определяет их алгебраические кратности. При этом в программе используется метод понижения степени характеристического многочлена до второй степени с неизвестным сомножителем $(\lambda - g)$, алгоритм нахождения которого заложен в программе и принадлежит разработчикам [5]. На следующем шаге проверяются условия: 1) все характеристические числа принадлежат данному полю или нет; 2) $k_i = 3 - \operatorname{rang}(A - \lambda_i E)$ для каждого λ_i. Если условия 1) и 2) дают положительный ответ, то матрица линейного оператора приводится к диагональному виду, и программа записывает этот вид. Если условие 1) выполняется, но не выполняется условие 2), то для этого значения λ_i программа ищет присоединенный вектор.

Для поиска собственных векторов при кратности, равной 1, используется алгоритм нахождения решения однородной системы через алгебраические дополнения к элементам одной из строк матрицы системы $(A - \lambda_i E)$. Присоединенные векторы находятся по соответствующему алгоритму решения неоднородной системы линейных уравнений. По найденным собственным векторам оператора выписывается матрица перехода от базиса, где матрица линейного оператора имела вид A, к базису, где матрица имеет диагональный вид. При наличии присоединенных векторов, выписывается матрица по столбцам из координат собственных и соответствующих им присоединенных векторов.

В случае, когда в условии 1) некоторые из λ_i, принадлежат полю комплексных чисел, всегда будет одно вещественное собственное значение и два комплексно-сопряженных. В поле комплексных чисел всегда кратность равна 1 и собственные векторы находятся при помощи созданного разработчиками алгоритма. Дальнейшие действия в поле комплексных чисел аналогичны действиям в поле действительных чисел.

Таким образом, в обучении QR-кодирование может стать инструментом для создания новых алгоритмов кодирования различной образовательной информации в дисциплине “Аналитическая геометрия и линейная алгебра”.

Литература

1. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности: 1-31 04 01 Физика (по направлениям) Направление специальности: 1-31 04 01-01 Физика (научно-исследовательская деятельность) 1-31 04 06 Ядерная физика и технологии 1-31 04 07 Физика наноматериалов и нанотехнологий УД-10000/уч. https://elib.bsu.by/handle/123456789/271625

2. *Высшая математика. Сборник задач: в 3 ч.* / В. К. Ахраменко [и др.]; под. ред. Н. Г. Абрашиной-Жадаевой и В.Н. Русака. Ч. 1. Минск, 2013. http://elib.bsu.by/handle/123456789/91377

3. *Высшая математика. Сборник задач: в 3 ч.* / В. К. Ахраменко [и др.]; под. ред. Н. Г. Абрашиной-Жадаевой и В.Н. Русака. Ч. 2. Минск, 2013. https://elib.bsu.by/handle/123456789/113069

4. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*: электронный учеб.-метод. комплекс по учебной дисциплине "Аналитическая геометрия и линейная алгебра" для специальностей: 1-31 04 01 Физика (по направлениям), 1-31 04 06 Ядерные физика и технологии, 1-31 04 07 Физика наноматериалов и нанотехнологий, 1-31 04 08 Компьютерная физика / БГУ, физический фак., каф. высшей математики и математической физики; составители: Н. Г. Абрашина-Жадаева [и др.]. Минск: БГУ, 2016. http://elib.bsu.by/handle/123456789/173448

5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов.* М.: Наука, 2006.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ»: ТЕОРИЯ И ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

И.А. Тимощенко, В.И. Зеленков, Н.Г. Абрашина-Жадаева

Математическое моделирование является одной из дисциплин, составляющих физическое образование, и именно оно тесно связано с методами математической физики. Учебное пособие написано сотрудниками кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета. Оно основано на опыте преподавания математических дисциплин на физическом факультете и является кратким изложением лекций по курсу «Математическое моделирование физических процессов», читаемых в течение ряда лет студентам физического факультета Белорусского государственного университета. Оно возникло на основе известных учебников и статей (см, например, [1-10] и цитируемую там литературу) и рассчитано на студентов старших курсов, магистрантов, аспирантов и инженеров с повышенной математической подготовкой.

Совершенно справедливо, что без математического моделирования и методов математической физики и их тесной связи немыслимо рассматривать модели физических явлений, проводить анализ и делать прогноз текущего процесса. Поэтому основной целью авторов пособия было так составить его содержание, чтобы оно лучшим образом формировало у студентов знания средств и методов моделирования физических процессов, а также умения ставить, решать и анализировать математические модели. В книге основными математическими методами изучения физических процессов, как в основном принято, является моделирование этих процессов в виде дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. Авторы считают, что это пособие может быть использовано в качестве основного материала для самоподготовки студентов научно-технических специальностей по курсу «Математическое моделирование физических процессов», а также может быть рекомендовано для использования в качестве раздаточного материала, облегчающего труд студентов на лекциях и лабораторных занятиях.

В учебном пособии представлены задачи популяционной динамики, мониторинга окружающей среды, метод подобия, задача Стефана о фазовом переходе, задачи гидродинамики, задача о течении грунтовых вод, эпидемические волны, рассмотрена динамика многоуровневых систем, нелинейная теплопроводность и горение, а также дробное интегро-дифференцирование и математическое моделирование аномальной диффузии.

Важно, что каждая глава начинается с формулировок определений и основных утверждений. Приводятся наиболее часто используемые уравнения математической физики и представлены методы решения этих уравнений. Завершает пособие перечень лабораторных заданий, где дается общая информация, основное задание, порядок выполнения лабораторной работы и, как правило, контрольные вопросы для самопроверки знаний и умений.

Пособие получило гриф Министерства образования и скоро выйдет из печати.

Литература

1. Тарасевич Ю. Ю. *Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс.* Москва: Эдиториал УРСС, 2001.

2. Мышкис А. Д. *Элементы теории математических моделей.* Москва: КомКнига, 2007.

3. Тихонов Н. А., Токмачев М. Г. *Основы математического моделирования.* Учебное пособие. Части 1-2. Москва: Физический факультет МГУ, 2013.

4. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Вычислительная теплопередача.* Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

5. Учайкин В. В. *Метод дробных производных.* Ульяновск: Артишок, 2008.

6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987.

7. Абрашин В. Н. *О некоторых разностных схемах для задач лучистой теплопроводности* // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. № 4. С. 753—756.

8. Савва В. А., Зеленков В. И. *Интегрируемая модель описания когерентной динамики квантовых многоуровневых систем* // Доклады НАН Беларуси. 2012. Т. 56. № 2. С. 35–39.

9. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимощенко И. А. *Конечно-разностные схемы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области* // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 7. С. 819–825.

10. Тимощенко И. А. *Численный метод решения уравнения двухсторонней аномальной диффузии в многомерной области* // Вестник БГУ, Серия 1. 2014. № 1. С. 96—100.

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

Н.К. Филиппова, И.И. Рушнова, И.А. Тимощенко, М.А. Глецевич, Н.Г. Абрашина-Жадаева

Одним из приоритетных направлений модернизации методики преподавания высшей математики в высших учебных заведениях является поиск новых форм организации и стимулирования самостоятельной работы студентов. С целью совершенствования самостоятельного обучения студентов на кафедре высшей математики и математической физики физического факультета Белорусского государственного университета (БГУ) разрабатываются и внедряются учебные и учебно-методические пособия [1–6], а также активно применяются электронные средства обучения [7, 8], размещаемые на образовательном портале БГУ.

Дисциплина «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» на физическом факультете БГУ читается в первом семестре и является составным элементом математического аппарата ряда курсов общей физики, теоретической физики и специальных физических дисциплин.

На основе многолетнего опыта преподавания математических дисциплин студентам физического факультета БГУ коллектив авторов кафедры высшей математики и математической физики подготовил учебное пособие «Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и тесты». При сохранении должного уровня теоретических знаний и применения их студентами в практических и исследовательских целях, а также самоконтроля навыков, пособие включает ту тематику, которая отражена в действующей учебной программе [9–11].

Цель авторов состояла в создании единого комплекса, соответствующего названному курсу для организации самостоятельной работы студентов и проверки их знаний по предмету. В пособие включены традиционные разделы «Аналитической геометрии» и «Линейной алгебры». Каждая глава пособия разбита на параграфы, в которых содержатся теоретические сведения, снабжённые обозначениями, важнейшими определениями, теоремами и формулами; тестовые задания для самоконтроля и контроля под руководством преподавателя. Тесты, с одной стороны, включают теоретические вопросы, а с другой стороны, требуют от студента более глубокого и обстоятельного владения основами предмета и практического применения для решения задач. Все тестовые задания снабжены ответами.

Пособие предназначено для оперативного контроля текущей успеваемости и промежуточной аттестации студентов с целью проверки их уровня подготовки по данной дисциплине и сформированности у них фундаментальных и практических навыков. Задания выбираются случайным образом из разных разделов, что исключает их повторение для каждого студента. Выбор разделов устанавливается преподавателем. В конце тестирования студент получает итоговый результат в процентах и возможность проверить правильность выполнения заданий. Отличительной особенностью пособия является широкое использование основных понятий и утверждений смежных разделов высшей математики, например, таких, как дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ и теория функций, методы математической физики.

Учебное пособие «Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и тесты» выйдет во второй половине текущего года и по своему уровню предназначено для студентов физико-математических, инженерно-физических специальностей вузов, однако будет полезно и студентам высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области компьютерных технологий, студентам специальностей, требующих хорошей математической подготовки, а также преподавателям высших учебных заведений.

Литература

1. Абрашина-Жадаева Н. Г. [и др.] *Analytic geometry.* Минск: БГУ, 2018. http://elib.bsu.by/handle/123456789/233043

2. Ахраменко В. К. [и др.] *Высшая математика. Сборник задач: в 3 ч. Ч. 1.* Под. ред. Н. Г. Абрашиной-Жадаевой и В. Н. Русака. Минск, 2013. http://elib.bsu.by/handle/123456789/91377

3. Ахраменко В. К. [и др.] *Высшая математика. Сборник задач: в 3 ч. Ч. 2.* Под. ред. Н. Г. Абрашиной-Жадаевой и В. Н. Русака. Минск, 2014. https://elib.bsu.by/handle/123456789/113069

4. Березкина Л. Л. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра.* Минск: РИВШ, 2015.

5. Абрашина-Жадаева Н. Г. [и др.] *Аналитическая геометрия в примерах и задачах.* Минск: РИВШ, 2008.

6. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимощенко И. А. *Vector and Tensor Analysis through Examples and Exercises.* Минск: БГУ, 2019. https://elib.bsu.by/handle/123456789/241678

7. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*: электронный учеб.-метод. комплекс по учебной дисциплине «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» для специальностей: 1-31 04 01 «Физика (по направлениям)», 1-31 04 06 «Ядерные физика и технологии», 1-31 04 07 «Физика наноматериалов и нанотехнологий», 1-31 04 08 «Компьютерная физика» / БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической физики; составители: Н. Г. Абрашина-Жадаева [и др.]. – Минск: БГУ, 2016. http://elib.bsu.by/handle/123456789/173448

8. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*: электронный учеб.-метод. комплекс по учебной дисциплине «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» для специальностей: 1-31 04 02 Радиофизика; 1-31 04 03 Физическая электроника; 1-31 03 07-02 Прикладная информатика (направление информационные технологии телекоммуникационных систем); 1-98 01 01-02 Компьютерная безопасность (направление радиофизические методы и программно-технические средства); 1-31 04 04 Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии / БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической физики; составители: Н. Г. Абрашина-Жадаева [и др.]. – Минск: БГУ, 2016. http://elib.bsu.by/handle/123456789/151153

9. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра.* Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности 1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность). УД-10132/уч. (https://elib.bsu.by/handle/123456789/273442)

10. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности: 1-31 04 01 Физика (по направлениям) Направление специальности: 1-31 04 О 1-01 Физика (научно-исследовательская деятельность) 1-31 04 06 Ядерная физика и технологии 1-31 04 07 Физика наноматериалов и нанотехнологий. УД-10000/уч. https://elib.bsu.by/handle/123456789/271625

11. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности 1-31 04 08 Компьютерная физика. УД-5518/уч. https://elib.bsu.by/handle/123456789/211295

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ИНСТРУМЕНТАХ ОЦЕНКИ УСВОЕНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Д.С. Шпак

Введение. В течение последнего десятилетия в системе высшего образования наблюдается некоторое уменьшение количества аудиторных часов, отводимых учебными планами специальностей учреждений высшего образования для изучения многих дисциплин, в том числе и по основным учебным дисциплинам «Высшая математика», «Математика».

В то же время следует отметить, что объем учебного материала не уменьшается, а значит, существенно увеличивается интенсивность изучения и, соответственно, сложность восприятия студентами учебных тем.

Необходимо также отметить, что по результатам проведенных исследований 80% студентов, обучающихся в вузах, нуждаются в дополнительных консультациях с преподавателем, а 95% испытывают потребность не только в консультациях, но и в реальной помощи [1].

Образовательными стандартами нового поколения устанавливаются требования к универсальным, базовым профессиональным и специализированным компетенциям специалиста, относительно которых студенту необходимо стать активным участником учебной деятельности, а преподавателю – лишь направляющим звеном. Это обусловливает необходимость изменения технологии организации образовательного процесса, осуществляемого в университетах.

Основная часть. Одним из перспективных направлений развития современного высшего образования является более широкое использование в образовательном процессе возможностей электронного обучения. Это касается аудиторных и внеаудиторных педагогических методов и технологий обучения, осуществления оценки качества обучения студентов, контроля знаний посредствам промежуточной и текущей аттестаций на основе компьютерных технологий и web-поддержки.

Самым популярным исследовательским методом определения уровня знаний, компетенций и способностей студентов является тестирование. Как форма контроля знаний тестирование появилось в начале двадцатого века в учебных заведениях Англии, США и Франции. Долгое время в СССР не признавали практику педагогического тестирования, помимо того имели место попытки запрета тестовых исследований [2].

Что же мы видим в настоящий момент? Для рационального формирования учебных планов и оптимизации учебной нагрузки в учреждениях высшего образования для изучения базовых основных учебных дисциплин создаются потоки из студенческих групп, которые могут составлять до $150-200$ человек. Следовательно, возникает потребность в систематическом и хорошо организованном контроле качественного уровня усвоения учебного материала больших групп (потоков) студентов. В таком случае такие формы проверки знаний как устный опрос, коллоквиум или контрольная работа являются трудозатратными, в первую очередь, для преподавателя.

В данном случае преподавателю на помощь приходят электронные ресурсы и средства обучения. В учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» с 2010 года основным электронным ресурсом является образовательный портал. Он позволяет организовывать образовательный процесс более гибко, осуществлять внеаудиторно коммуникации со студентами, обеспечивать целенаправленную, систематичную и всестороннюю оценку познавательной деятельности студентов.

Образовательный портал позволяет создать такие элементы курса как «Обратная связь», «Опрос», «Семинар», «Тест» и другие. Данные модули позволяют преподавателю создавать опросы различных типов и организовывать необходимый сбор данных. Например, используя элемент курса «Обратная связь», преподаватель может разработать собственную анкету с различными типами вопросов для оценки учебного материала дисциплины. Анкета может проводиться анонимно или с учетом зарегистрированных пользователей. Результаты преподаватель может отслеживать в режиме онлайн.

Элемент курса «Семинар» предназначен для предоставления, просмотра, рецензирования и оценивания студенческих работ. Студенты прикрепляют свою работу в виде файла на первом этапе семинара, на втором этапе, при необходимости, студенты могут производить взаимооценивание своих работ, и наконец, на заключительном этапе преподаватель выставляет отметки студентам за проделанную работу.

Для использования элемента курса «Тест» на образовательном портале необходимо сначала наполнить раздел «Банк вопросов». В данный раздел размещаются вопросы, которые в последующем будут формировать тест. Это могут быть вопросы следующих типов: множественный выбор, верно/неверно, на соответствие, вычисляемый, эссе, перетаскивание в текст и другие [3].

Образовательный портал университета позволяет использовать и внешние интерактивные ресурсы для моментальной проверки знаний студентов. Так, преподаватели часто используют mentimeter — онлайн-сервис для создания интерактивных опросов.

Следует отметить также возможности для тестирования, предоставляемые электронными учебно-методическими комплексами (см., например, [4]). В этом случае тест используется студентами в основном как форма самопроверки, а также для подготовки к различного рода контрольным мероприятиям.

Заключение. Представленные элементы виртуальной образовательной среды широко используются преподавателями, применяющими методику перевернутого обучения. Основная суть данной методики заключается в самостоятельном изучении студентами учебного материала, подготовленного преподавателем, а в аудитории происходит лишь закрепление практического материала. Одним из основных компонентов данной методики является создание условий для освоения студентами ключевых компетенций по теме и организация текущего и итогового контроля полученных компетенций через совместный выбор нескольких форм выполненной работы. Успешной формой в данном случае и является тестирование, организованное на образовательном портале университета. Это рациональная и удобная форма аттестации студентов.

Литература

1. Воробьев А. Е., Мурзаева А. К. *Основы технологии «перевернутого обучения» в вузах* // Вестник Бурятского государственного университета. 2018. В. 1. С. 18–30.
2. Аванесов В. С. *Научные основы тестового контроля знаний.* М.: Иссл. центр, 1994.
3. Шпак Д. С., Смотрицкий К. А. *Элементы электронного обучения в образовательном процессе естественно-математических дисциплин* // Электронный научно-методический журнал «Университет образовательных инноваций». 2019. № 2. http://www.euryedu.grsu.by/images/files/2_2019/6.pdf
4. Ровба Е. А., Сетько Е. А., Ляликов А. С., Смотрицкий К. А. *Высшая математика: электронный учебно-методический комплекс* [Электронный ресурс] // УО «Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы», 2011.

АВТОРЫ ДОКЛАДОВ

Абдурахимов А. abduraximov1943@mail.ru. Ташкентский архитектурно-строительный институт, Ташкент, Узбекистан. С. 71.

Абрашина-Жадаева Н.Г. zhadaeva_natalja@mail.ru. Минск, Беларусь. С. 115, 125, 139, 140, 141.

Андросов А.К. sasha.androsov.01@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 6.

Андрушкевич И.Е. racursj@yandex.ru. Институт бизнеса Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь. С. 72.

Антоневич А.Б. antonevich@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 43.

Ариан Абдул Ахад. arinkandahar@mail.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ "БелГУ") , Белгород, Россия. С. 61.

Астровский А.И. aastrov53@gmail.com. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь. С. 75.

Бекиев А.Б. ashir1976@mail.ru. Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан. С. 19.

Березкина Л.Л. berezkina.l51@gmail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 112, 113.

Бештокова З.В. zarabaeva@yandex.ru. Кабардино-Балкарский государственный университет. С. 45.

Бондарь Л.Н. b_lina@ngs.ru. Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия. С. 3.

Бородич С.М. sirius722@rambler.ru. Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь. С. 4.

Булыно Д.А. dabulyno13@gmail.com. Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь. С. 18.

Вакульчик В.С. v.vaculchik@psu.by. Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь. С. 131.

Василина Г.К. v_gulmira@mail.ru. Институт математики и математического моделирования, Алматинский университет энергетики и связи им. Г. Даукеева, Алматы, Казахстан. С. 99.

Васильев А.В. 756914@bsu.edu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 49, 47.

Васильев В.Б. vbv57@inbox.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 49, 47.

Васильева О.А. vasiljeva.ovas@yandex.ru. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 21.

Васьковский М.М. vaskovskii@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 51.

Вирченко Ю.П. virch@bsu.edu.ru. Белгородский государственный университет, Белгород, Россия. С. 52.

Волков А.П. alex.volkov85@gmail.com. Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. С. 17.

Волков В.М. v.volkov@tut.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 76.

Володченкова Л.А. volodchenkova2007@yandex.ru. Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия. С. 78.

Сальников Д.А. dima.saln.gr@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 96.

Ситник С.М. sitnik@bsu.edu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 61.

Спесивцева К.А. ksenia.spesivtseva@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 24.

Старовойтова Е.Л. stelle@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 136.

Статкевич С.Э. sstat@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 98.

Судник Я.С. yass290304@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 139.

Тимощенко И.А. timoshchenkoia@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 140, 141.

Тлеубергенов М.И. marat207@mail.ru. Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан. С. 99.

Трифонова И.В. irinat@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 62.

Трубников Ю.В. yurii_trubnikov@mail.ru. Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь. С. 101.

Усков В.И. vum1@yandex.ru. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, Воронеж, Россия. С. 26.

Устилко Е.В. ustilko@tut.by. Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь. С. 29.

Филиппова Н.К. filipava@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 141.

Филипцов А.В. filiptsov@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 136.

Хаитхам Ал-Кархи. 1430653@bsu.edu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 61.

Хацкевич Г.А. khatskevich@sbmt.by. Институт бизнеса Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь. С. 94.

Хашимов А.Р. abdukomil@yandex.ru. Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан. С. 31.

Ходырева А.А. 711012@bsu.edu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 47.

Холиков Д.К. xoliqov23@mail.ru. Ташкентский архитектурно-строительный институт, Ташкент, Узбекистан. С. 71.

Чеб Е.С. cheb@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 33.

Чернявский М.М. misha360ff@mail.ru. Витебский государственный университет им.П.М. Машерова, Витебск, Беларусь. С. 101.

Чехменок Т.А. TChekhmenok@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 118.

Шагова Т.Г. tanya.shagova@gmail.comantonevich@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 43.

Шилин А.П. a.p.shilin@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 64.

Шилинец В.А. v.shilinets@gmail.com. Международный университет "МИТСО", Минск, Беларусь. С. 34.

Шпак Д. С. shpak_ds@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 143.

Шушкевич Г. Ч. gsys@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 104.

Эберлейн Н.В. 649377@bsu.edu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 49.

Янович Л.А. yanovich@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 57.

Akhmedov M.I. maqsad.ahmedov@mail.ru;. YEOJU Technical Institute in Tashkent, Uzbekistan. С. 36.

Gladkov A. gladkoval@mail.ru. Belarusian State University, Minsk, Belarus. С. 37.

Guedda M. mohamed.guedda@u-picardie.fr. Université de Picardie, Amiens, France. С. 37.

Dryuma V.S. valdryum@gmail.com. Institute of Matematics and Compute Science, Kishinev, Moldova. С. 106.

Dymkov M.P. dymkov_m@bseu.by. Belarus State Economic University, Minsk, Belarus. С. 65.

Dymkou V.M. dymkov@mail.ru. Bad Soden, Germany. С. 65.

Korzyuk V.I. korzyuk@bsu.by. Belarusian State University, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. С. 38.

Lomovtsev F.E. lomovcev@bsu.by. Belarusian State University, Minsk, Belarus. С. 40.

Papkovich M. V. mpapkovich@yandex.ru. Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus. С. 69.

Parmanova R. T. toshpul@mail.ru. Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan. С. 108.

Rudzko J. V. janycz@yahoo.com. Belarusian State University, Minsk, Belarus. С. 38.

Sobirov Z.A. z.sobirov@nuu.uz. University of Geological Sciences, Tashkent, Uzbekistan. С. 36.

Shlapakov S.A. kgima@vsu.by. Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus. С. 67.

Sitnik S.M. sitnik@bsu.edu.ru. Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia. С. 67.

Skoromnik O. V. skoromnik@gmail.com. Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus. С. 67, 69.

Tashpulatov S.M. sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru. Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan. С. 108.

СОДЕРЖАНИЕ

Уравнения с частными производными

Интегро-дифференциальные операторы и уравнения

Дифференциальные уравнения и их приложения

Методика преподавания математических дисциплин в высшей школе

Научное издание

XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2022)

Материалы конференции

Часть 2

Редакторы *В. В. Амелькин, А. Б. Антоневич, А. И. Астровский, С. Ю. Башун, М. М. Васьковский, А. Л. Гладков, В. И. Громак, А. К. Деменчук, А. А. Козлов, С. А. Мазаник, Е. К. Макаров*
Компьютерная верстка *А. К. Деменчук, А. А. Козлов, Е. К. Макаров*

Подписано в печать 16.05.22. Формат $60 \times 84\,{}^1/_8$. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 18,13. Уч.-изд. л. 19,08. Тираж 60 экз. Заказ 304.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.