МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Самостоятельная работа по предмету «Матричный анализ» Вариант

Выполнил: студент гр.

(Ф.И.О)

Проверил: преподаватель Мальцев С.В.

(Ф.И.О)

Новополоцк 2013

Задание 1.Элементы матричной алгебры.

Построить матрицу-циркулянт на основе вектора :
Вектор задания представляется в двоичном виде в алфавите 0=1; 1= -1

315 => 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 -1

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Счет строк ведем с 1.
Вычислить произведение матрицы-циркулянта на пятую строку:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_5 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \\ 9 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вывод (см методические указания).

Построить усеченные матрицы размером 3*3 из исходной матрицы-циркулянта (начало отсчета - вторая строка-второй столбец, шестая строка-второй столбец) и вычислить их произведение слева направо и справа налево:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вычислить кронекеровское произведение усеченных матриц $a \otimes b$:

```
>> kron(a,b)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Анализ и формализация типовых задач цифровой обработки.

Представить формализацию задачи декодирования для полученной ранее бинарной матриц и строки, указанной в задании 2 (строка 6) методом максимального правдоподобия:

Счет строк ведем с 1.

Умножим сигнал на отрезок сигнала и узнаем уровень корреляции:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot A_6 \cdot \frac{1}{9} = \begin{pmatrix} 0.111 \\ 0.111 \\ 0.111 \\ -0.333 \\ -0.333 \\ 1 \\ -0.333 \\ -0.333 \\ 0.111 \end{pmatrix}$$

Максимальный уровень корреляции наблюдается в 6 строке, значит сигнал смещен на 6 тактов.

Представить формализацию задачи синхронизации кода, полученного на основе циркулянта строки кода Баркера длины N=13 и кодового слова с номером согласно варианта (строка 4):

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B \cdot B_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Из полученного результата видно, что был принят сигнал в четвертой строке.

Представить формализацию задачи обнаружения фрагмента изображения на основе матричной алгебры для пиксельного изображения соответствующего циркулянту задания 1 (Андреевский крест размером 3*3):

Для обнаружения изображения используется поэлементное сравнение изображения с образцом.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$K_{1.1}$=8-1=7
$K_{1.2}$=3-6=-3
$K_{1.3}$=4-5=-1
$K_{1.4}$=6-3=3
$K_{1.5}$=5-4=1
$K_{1.6}$=4-5=-1
$K_{1.7}$=3-6=3

$K_{2.1}$=0-9=-9
$K_{2.2}$=8-1=7
$K_{2.3}$=3-6=-3
$K_{2.4}$=4-5=-1
$K_{2.5}$=5-4=1
$K_{2.6}$=5-4=1
$K_{2.7}$=4-5=-1

$K_{3.1}$=8-1=7
$K_{3.2}$=0-9=-9
$K_{3.3}$=8-1=7
$K_{3.4}$=3-6=-3
$K_{3.5}$=4-5=-1
$K_{3.6}$=5-4=1
$K_{3.7}$=5-4=1

$K_{4.1}$=3-6=-3
$K_{4.2}$=8-1=7
$K_{4.3}$=0-9=-9
$K_{4.4}$=7-2=5
$K_{4.5}$=3-6=-3
$K_{4.6}$=4-5=-1
$K_{4.7}$=5-4=1

$K_{5.1}$=4-5=-1
$K_{5.2}$=3-6=-3
$K_{5.3}$=8-1=7
$K_{5.4}$=0-9=-9
$K_{5.5}$=8-1=7
$K_{5.6}$=4-5=-1
$K_{5.7}$=4-5=-1

$K_{6.1}$=5-4=1
$K_{6.2}$=4-5=-1
$K_{6.3}$=3-6=-3
$K_{6.4}$=8-1=7
$K_{6.5}$=0-9=-9
$K_{6.6}$=8-1=7
$K_{6.7}$=2-7=-5

$K_{7.1}$=5-4=1
$K_{7.2}$=5-4=1
$K_{7.3}$=4-5=-1
$K_{7.4}$=3-6=-3
$K_{7.5}$=8-1=7
$K_{7.6}$=0-9=-9
$K_{7.7}$=8-1=7

Максимальный уровень корреляции 7, следовательно совпадений нет и искомое изображение не обнаружено, но т.к. наблюдается уровень корреляции -9 ,то в данном сигнале присутствует инверсное искомое изображение.

Задание 3. Факторизация бинарных матриц и преобразования Адамара

3-1.Построить матрицу Адамара третьего порядка, осуществить ее факторизацию двумя способами, представить граф вычислительного процесса умножения вектора на матрицу, провести анализ вычислительной сложности:

Счет строк ведем с 0.

Согласно теореме 1 из УМК матрица A раскладывается на произведение трех слабо заполненных сомножителей:

$$A=B_3*B_2*B_1=B^3 \qquad \text{, где}$$

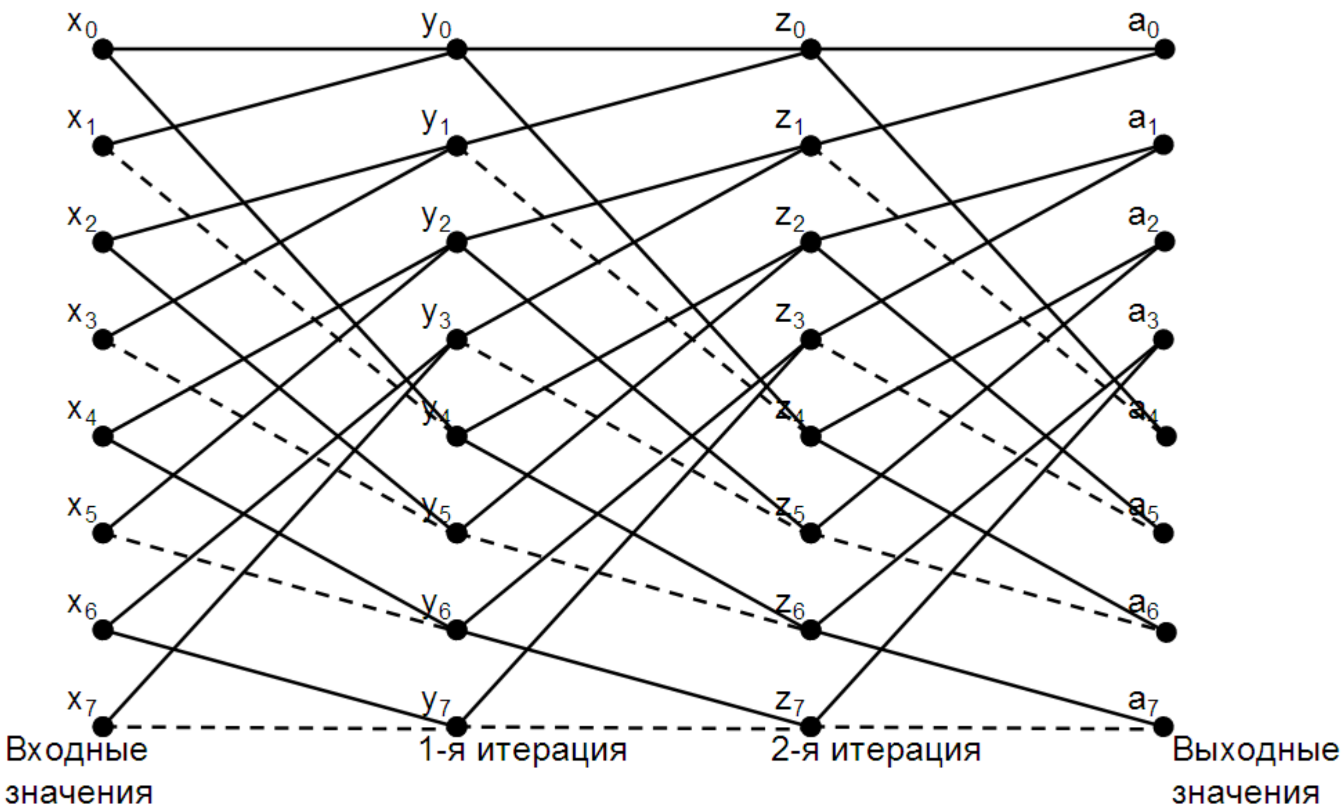
```
>> A = hadamard(8)
```

A =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Граф вычислительного процесса.



Согласно теоремы 2 из УМК факторизовать матрицу Адамара можно по формуле:

$$A = C_8^{(1)} \cdot C_8^{(2)} \cdot C_8^{(3)}$$

из этого следует:

>> A = hadamard(8)

A =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

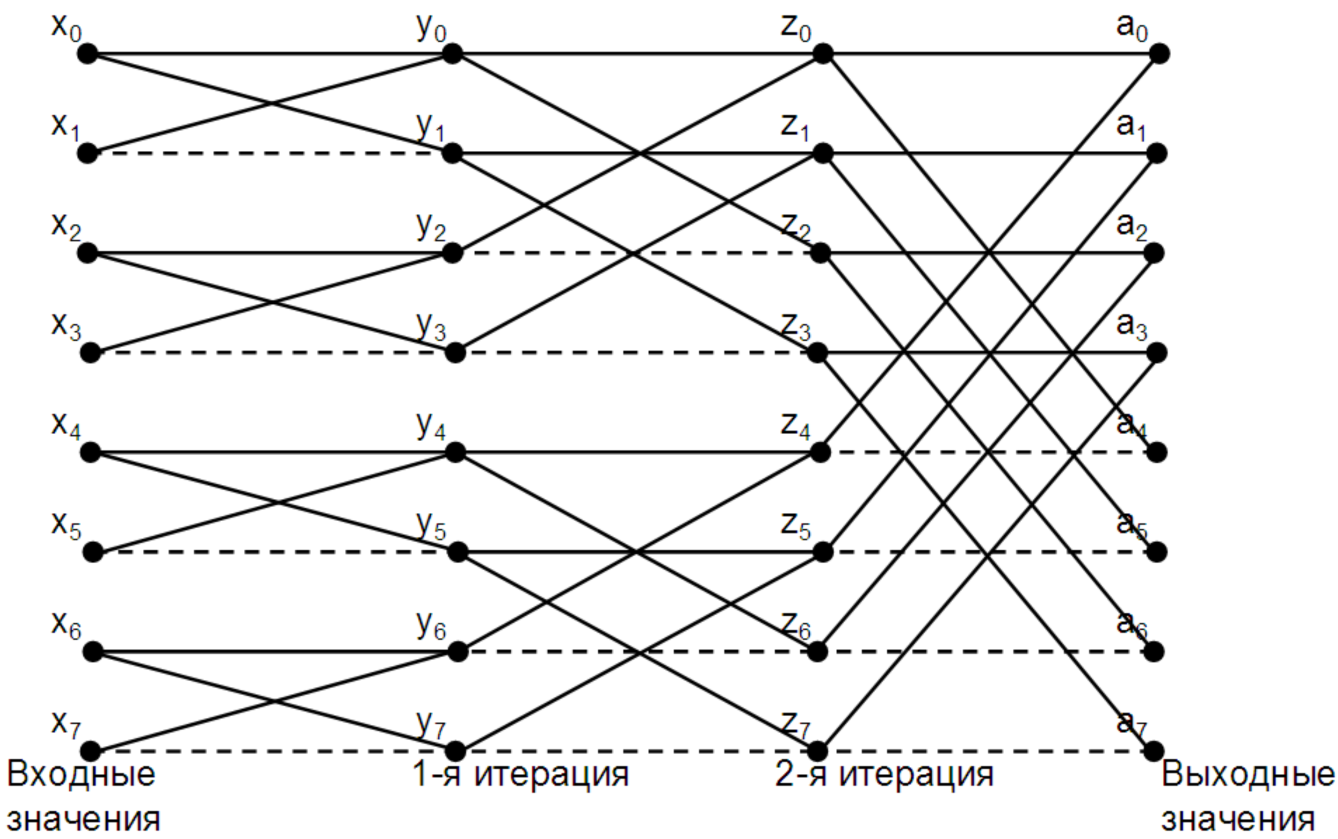
$$C_8^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_8^{(2)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_8^{(3)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Граф вычислительного процесса.



Анализ вычислительной сложности.

Вычисление векторно-матричного произведения при использовании рассмотренных методов факторизации матриц Адамара требует выполнения 24 операций типа сложение-вычитание. Прямой метод умножения вектора на матрицу A предполагает 56 вычислений.

3-2.Используя матрицу-циркулянт из первого задания разработать алгоритм ее факторизации на основе универсального метода, построить граф вычислительного процесса векторно-матричного произведения и проверить результат, провести анализ вычислительной сложности.

Счет строк ведем с 0.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C^{(3)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

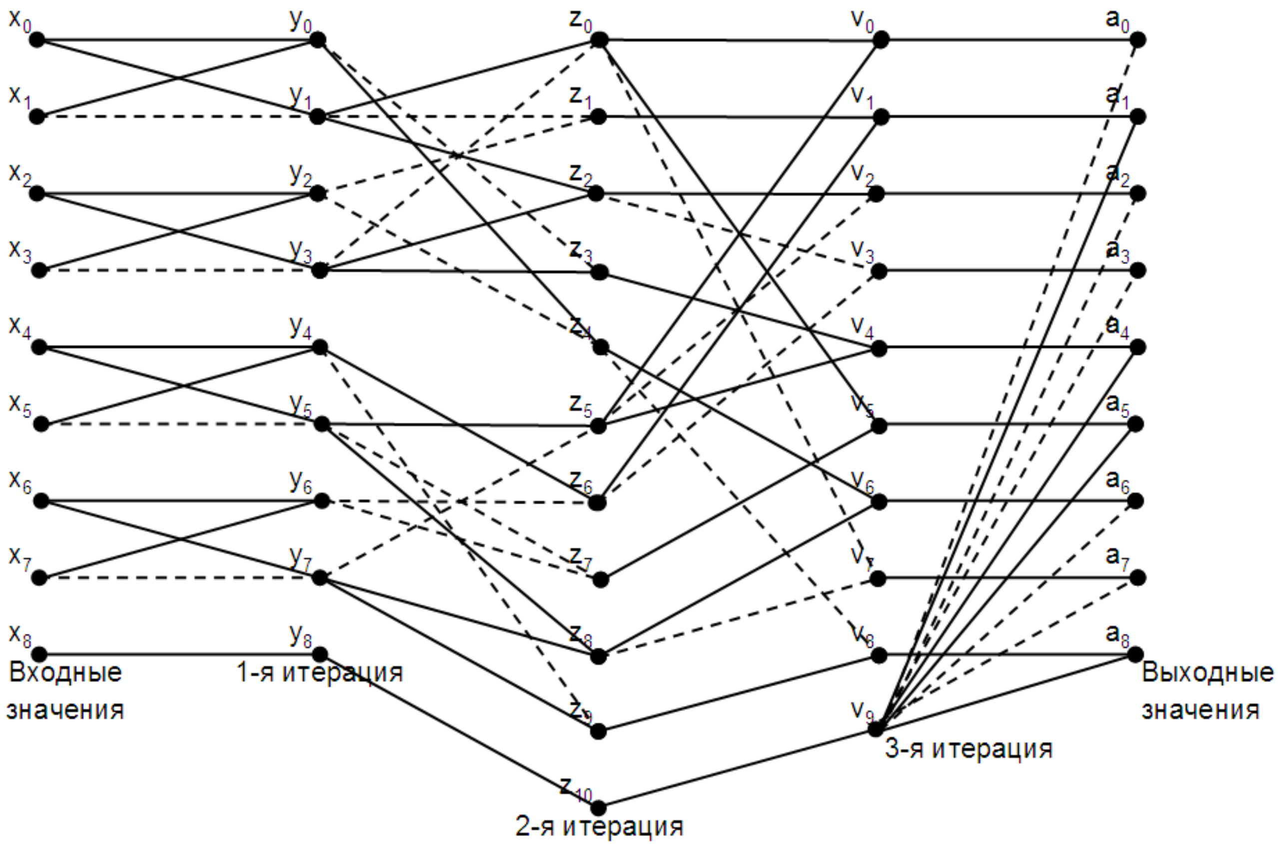
$$D_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Так как в каждой строке матрицы D_3 не более 2-х ненулевых элементов, то алгоритм факторизации закончен и матрица D_3 является четвертым сомножителем факторизации.

Факторизация матрицы A этим алгоритмом будет иметь вид:

$$A = C^{(1)} * C^{(2)} * C^{(3)} * D_3$$

Граф вычислительного процесса.



Анализ вычислительной сложности.

При факторизации произвольных бинарных матриц по данному алгоритму верхняя граница сложности вычисления векторно-матричного произведения определяется из формулы:

$$S_{алг.} \approx \begin{cases} 3+\dfrac{N}{4} & если \quad N \le 128 \\ 19+\dfrac{N}{8} & если \quad 128 \le N \le 2^{15} \end{cases} .$$

Анализ данного алгоритма факторизации показал следующее:

1. Оценка верхней границы вычислений на основе данного алгоритма значительно превышает теоретически рассчитанный нижний предел сложности ($S=0.5\log_2 N$).
2. Реальная вычислительная сложность для ряда бинарных сигналов с хорошими корреляционными свойствами (квадратично-вычетные коды, характеристические последовательности, коды Якоби) значительно превышает нижний предел сложности.

Задание 4. Преобразования в базисе ДЭФ.
-выполнить прямое и обратное преобразование в базисе ДЭФ для длины вектора N=8.(В качестве опорного вектора используется усеченная до восьми символов третья строка матрицы циркулянта из задания №1, циклический сдвиг этой строки на пять символов используется в качестве входного сигнала);
- построить граф вычислительного процесса, осуществить оценку вычислительной сложности.

Опорный вектор S_0: 1 -1 1 -1 -1 1 1 -1

Входной сигнал S_5: 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1

Составляем матрицу вида:

$$W_8=\begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ W^0 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ W^0 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{pmatrix}$$

где:

$W = \exp(-i\frac{2\pi}{N})$, где i- мнимая единица, N размер матрицы.

$def(k,n) = W^{kn}$, где k - № строки , n - № столбца

Получим:

$$W := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.707 - 0.707i & -i & -0.707 - 0.707i & -1 & -0.707 + 0.707i & i & 0.707 + 0.707i \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -0.707 - 0.707i & i & 0.707 - 0.707i & -1 & 0.707 + 0.707i & -i & -0.707 + 0.707i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -0.707 + 0.707i & -i & 0.707 + 0.707i & -1 & 0.707 - 0.707i & i & -0.707 - 0.707i \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & 0.707 + 0.707i & i & -0.707 + 0.707i & -1 & -0.707 - 0.707i & -i & 0.707 - 0.707i \end{pmatrix}$$

Вычислим спектр опорного сигнала S_0. Для этого умножим матрицу W на вектор S_0:

$$S = W * S_0$$

Получим :

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.586 + 1.414i \\ -2 - 2i \\ 3.414 + 1.414i \\ 4 \\ 3.414 - 1.414i \\ -2 + 2i \\ 0.586 - 1.414i \end{pmatrix}$$

Проверим правильность нахождения спектра путем умножения полученного результата на комплексно-сопряженную матрицу V и деления на длину сигнала:

$$V * S * \frac{1}{8} = S_0$$

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.707 + 0.707 \cdot i & i & -0.707 + 0.707 \cdot i & -1 & -0.707 - 0.707 \cdot i & -i & 0.707 - 0.707 \cdot i \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -0.707 + 0.707 \cdot i & -i & 0.707 + 0.707 \cdot i & -1 & 0.707 - 0.707 \cdot i & i & -0.707 - 0.707 \cdot i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -0.707 - 0.707 \cdot i & i & 0.707 - 0.707 \cdot i & -1 & 0.707 + 0.707 \cdot i & -i & -0.707 + 0.707 \cdot i \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & 0.707 - 0.707 \cdot i & -i & -0.707 - 0.707 \cdot i & -1 & -0.707 + 0.707 \cdot i & i & 0.707 + 0.707 \cdot i \end{pmatrix}$$

$$V * S * \frac{1}{8} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9997 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0.9997 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Вычислим спектр принятого сигнала S_5 . Для этого умножим матрицу W на S_5:

$$W * S_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.586 - 1.414i \\ 2 - 2i \\ 3.414 - 1.414i \\ -4 \\ 3.414 + 1.414i \\ 2 + 2i \\ 0.586 + 1.414i \end{pmatrix}$$

Умножим поэлементно спектр входного сигнала S_0 на комплексно сопряженный спектр принятого сигнала S_5:

$$M = S_0 * S_5^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.6560 + 1.6572 \cdot i \\ -8.000 \cdot i \\ 9.6560 + 9.6448 \cdot i \\ -16 \\ 9.6560 - 9.6548 \cdot i \\ 8.000 \cdot i \\ -1.6560 - 1.6572 \cdot i \end{pmatrix}$$

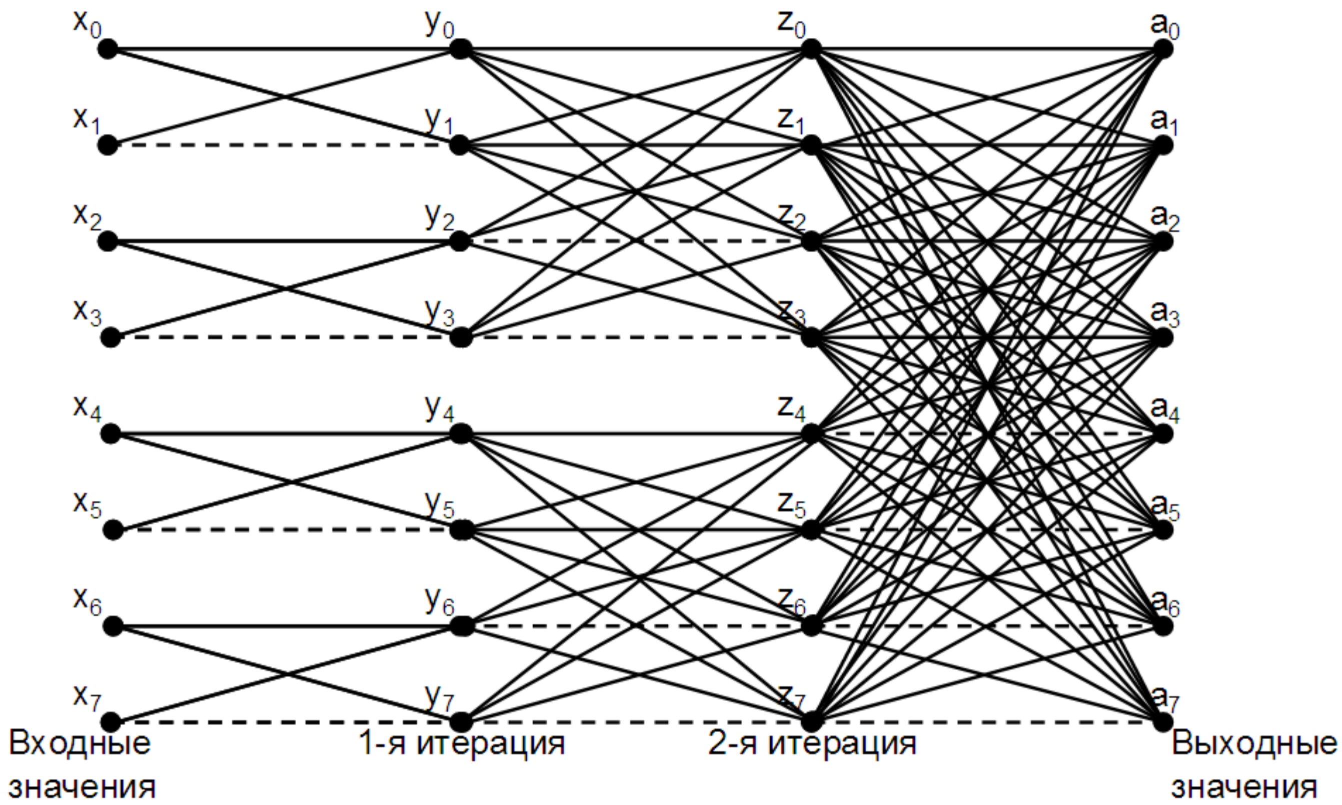
Вычислим задержку сигнала, умножив результат корреляции M между спектрами на комплексно-сопряженную матрицу ДЭФ V :

$$V * M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0097 \\ -0.0048 \\ 0 \\ -32 \\ 63.9903 \\ 0 - 31.9952 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Максимальная компонента равна 63,9903 , ее номер 5(счет строк с 0) следовательно задержка на пять тактов.

Граф вычислительного процесса:

Граф алгоритма имеет регулярную структуру и строится из пары базовых операций, которая получила название "бабочка". "Крылья" такой бабочки увеличиваются вдвое на каждой последующей итерации.



Анализ вычислительной сложности.

Вычисление ДПФ прямым методом требует выполнения $N^2=8^2=64$ операций умножения и $N(N\text{-}1)=8*(8\text{-}1)=56$ операций сложения комплексных чисел. Квадратичная зависимость объема вычислений от размера входной реализации является существенным препятствием при практическом использовании ДПФ.