Методические указания для самостоятельной работы по курсу «Основы матричного анализа»

1. Задания выбираются из таблицы, номер строки соответствует номеру в списке группы, номер варианта – номеру группы

Вариант 1

1.1.Элементы матричной алгебры

- Построить матрицу-циркулянт на основе вектора (вектор выбирается согласно варианта):

№ варианта	Задание 1	Задание 2	Задание 2в	Задание 2с	№ варианта	Задание 1	Задание 2	Задание 2в	Задание 2с
1	103	1	2	1	19	325	5	5	1
2	215	2	3	2	20	312	6	4	2
3	352	3	4	3	21	243	7	3	3
4	442	4	5	4	22	235	8	2	4
5	423	5	6	5	23	325	8	6	5
6	632	6	7	6	24	236	7	8	6
7	734	7	8	1	25	437	6	7	1
8	171	8	9	2	26	171	5	6	2
9	663	7	10	3	27	663	4	5	3
10	761	6	11	4	28	117	3	4	4
11	717	5	12	5	29	606	2	4	5
12	437	4	12	6	30	734	1	5	6
13	137	3	11	1	31	731	6	6	1
14	146	2	10	2					
15	156	1	9	3					
16	523	2	8	4					
17	653	3	7	5					
18	675	4	6	6					

(Вектор задания представляется в двоичном виде в алфавите -1=0\+1=1, например 543 - 1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,1)

- вычислить произведение матрицы-циркулянта на пятую строку;

- построить усеченные матрицы размером 3*3 из исходной матрицы-циркулянта (начало отсчета - вторая строка-второй столбец, шестая строка-второй столбец) и вычислить их произведение слева направо и справа налево;

- вычислить кронекеровское произведение усеченных матриц;

1.2. Анализ и формализация типовых задач цифровой обработки

- представить формализацию задачи декодирования для полученной ранее бинарной матриц и строки, указанной в задании 2 методом максимального правдоподобия;

- представить формализацию задачи синхронизации кода, полученного на основе циркулянта строки кода Баркера длины N=13 и кодового слова с номером согласно варианта (Задание 2в);

- представить формализацию задачи обнаружения фрагмента изображения на основе матричной алгебры для пиксельного изображения соответствующего циркулянту задания 1 (номер фрагмента – задание 3с):

1- крест из1 размером 3*3;
2- Андреевский крест размером 3*3;
3- белый квадрат размером 3*3;
4- черный квадрат размером 3*3;
5- черный нуль размером 3*3;
6- белый нуль размером 3*3;

1.3.Факторизация бинарных матриц и преобразования Адамара

- построить матрицу Адамара третьего порядка, осуществить ее факторизацию двумя способами, представить граф вычислительного процесса умножения вектора на матрицу, провести анализ вычислительной сложности;

-используя матрицу-циркулянт из первого задания разработать алгоритм ее факторизации на основе универсального метода, построить граф вычислительного процесса векторно-матричного произведения и проверить результат, провести анализ вычислительной сложности.

1.4. Преобразования в базисе ДЭФ

-выполнить прямое и обратное преобразование в базисе ДЭФ для длины вектора N=8.

(В качестве опорного вектора используется усеченная до восьми символов третья строка матрицы циркулянта из задания №1, циклический сдвиг этой строки на пять символов используется в качестве входного сигнала);

- построить граф вычислительного процесса, осуществить оценку вычислительной сложности.

Вариант 2

2.1.Элементы матричной алгебры

- Построить матрицу-циркулянт на основе вектора (вектор выбирается согласно варианта):

№ варианта	Задание 1	Задание 2	Задание 2в	Задание 2с	№ варианта	Задание 1	Задание 2	Задание 2в	Задание 2с
1	223	1	2	1	19	221	5	5	1
2	313	2	3	2	20	212	6	4	2
3	442	3	4	3	21	443	7	3	3
4	532	4	5	4	22	434	8	2	4
5	623	5	6	5	23	325	8	6	5
6	732	6	7	6	24	136	7	8	6
7	634	7	8	1	25	537	6	7	1
8	271	8	9	2	26	571	5	6	2
9	263	7	10	3	27	763	4	5	3
10	311	6	11	4	28	317	3	4	4
11	407	5	12	5	29	506	2	4	5
12	537	4	12	6	30	334	1	5	6
13	337	3	11	1	31	431	6	6	1
14	446	2	10	2					
15	555	1	9	3					
16	625	2	8	4					
17	753	3	7	5					
18	175	4	6	6					

(Вектор задания представляется в двоичном виде в алфавите -1=0\+1=1,

например 543 - 1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,1)

- вычислить произведение матрицы-циркулянта на пятую строку;

- построить усеченные матрицы размером 3*3 из исходной матрицы-циркулянта (начало отсчета - вторая строка-второй столбец, шестая строка-второй столбец) и вычислить их произведение слева направо и справа налево;

- вычислить кронекеровское произведение усеченных матриц;

2.2. Анализ и формализация типовых задач цифровой обработки

- представить формализацию задачи декодирования для полученной ранее бинарной матриц и строки, указанной в задании 2 методом максимального правдоподобия;

- представить формализацию задачи синхронизации кода, полученного на основе циркулянта строки кода Баркера длины N=13 и кодового слова с номером согласно варианта (Задание 2в);

- представить формализацию задачи обнаружения фрагмента изображения на основе матричной алгебры для пиксельного изображения соответствующего циркулянту задания 1 (номер фрагмента – задание 3с):

7- крест из1 размером 3*3;
8- Андреевский крест размером 3*3;
9- белый квадрат размером 3*3;
10- черный квадрат размером 3*3;
11- черный нуль размером 3*3;
12- белый нуль размером 3*3;

2.3.Факторизация бинарных матриц и преобразования Адамара

- построить матрицу Адамара третьего порядка, осуществить ее факторизацию двумя способами, представить граф вычислительного процесса умножения вектора на матрицу, провести анализ вычислительной сложности;

-используя матрицу-циркулянт из первого задания разработать алгоритм ее факторизации на основе универсального метода, построить граф вычислительного процесса векторно-матричного произведения и проверить результат, провести анализ вычислительной сложности.

2.4. Преобразования в базисе ДЭФ

-выполнить прямое и обратное преобразование в базисе ДЭФ для длины вектора N=8.

(В качестве опорного вектора используется усеченная до восьми символов третья строка матрицы циркулянта из задания №1, циклический сдвиг этой строки на пять символов используется в качестве входного сигнала);

- построить граф вычислительного процесса, осуществить оценку вычислительной сложности.

Вариант 3

3.1.Элементы матричной алгебры

- Построить матрицу-циркулянт на основе вектора (вектор выбирается согласно варианта):

№ варианта	Задание 1	Задание 2	Задание 2в	Задание 2с	№ варианта	Задание 1	Задание 2	Задание 2в	Задание 2с
1	523	1	2	1	19	327	5	5	1
2	413	2	3	2	20	315	6	4	2
3	542	3	4	3	21	246	7	3	3
4	632	4	5	4	22	235	8	2	4
5	323	5	6	5	23	326	8	6	5
6	232	6	7	6	24	237	7	8	6
7	634	7	8	1	25	467	6	7	1
8	271	8	9	2	26	271	5	6	2
9	463	7	10	3	27	563	4	5	3
10	511	6	11	4	28	147	3	4	4
11	407	5	12	5	29	506	2	4	5
12	337	4	12	6	30	434	1	5	6
13	337	3	11	1	31	331	6	6	1
14	346	2	10	2					
15	455	1	9	3					
16	625	2	8	4					
17	753	3	7	5					
18	775	4	6	6					

(Вектор задания представляется в двоичном виде в алфавите -1=0\+1=1,

например 543 - 1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,1)

- вычислить произведение матрицы-циркулянта на пятую строку;

- построить усеченные матрицы размером 3*3 из исходной матрицы-циркулянта (начало отсчета - вторая строка-второй столбец, шестая строка-второй столбец) и вычислить их произведение слева направо и справа налево;

- вычислить кронекеровское произведение усеченных матриц;

3.2. Анализ и формализация типовых задач цифровой обработки

- представить формализацию задачи декодирования для полученной ранее бинарной матриц и строки, указанной в задании 2 методом максимального правдоподобия;

- представить формализацию задачи синхронизации кода, полученного на основе циркулянта строки кода Баркера длины N=13 и кодового слова с номером согласно варианта (Задание 2в);

- представить формализацию задачи обнаружения фрагмента изображения на основе матричной алгебры для пиксельного изображения соответствующего циркулянту задания 1 (номер фрагмента – задание 3с):

13- крест из1 размером 3*3;
14- Андреевский крест размером 3*3;
15- белый квадрат размером 3*3;
16- черный квадрат размером 3*3;
17- черный нуль размером 3*3;
18- белый нуль размером 3*3;

3.3.Факторизация бинарных матриц и преобразования Адамара

- построить матрицу Адамара третьего порядка, осуществить ее факторизацию двумя способами, представить граф вычислительного процесса умножения вектора на матрицу, провести анализ вычислительной сложности;

-используя матрицу-циркулянт из первого задания разработать алгоритм ее факторизации на основе универсального метода, построить граф вычислительного процесса векторно-матричного произведения и проверить результат, провести анализ вычислительной сложности.

3.4. Преобразования в базисе ДЭФ

-выполнить прямое и обратное преобразование в базисе ДЭФ для длины вектора N=8.

(В качестве опорного вектора используется усеченная до восьми символов третья строка матрицы циркулянта из задания №1, циклический сдвиг этой строки на пять символов используется в качестве входного сигнала);

- построить граф вычислительного процесса, осуществить оценку вычислительной сложности.

1. Математические основы цифровой обработки сигналов на основе векторно-матричного аппарата.

1.1.Основные понятия и определения векторно-матричной алгебры.

N- мерным вектором называется упорядоченный набор из **N** в общем случае комплексных чисел. Вектор вида:

называется вектор - столбцом, в противоположность вектор - строке, когда числа расположены горизонтально. Вектор может рассматриваться как запись отчетов дискретной функции заданной **N** числами.

Два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равны только в том случае, если равны их компоненты $x_i = y_i$ для всех $i = 0,1, \ldots, N-1$. Сумма двух векторов $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ также является вектором:

Скалярное произведение двух векторов **x** и **y** это единственная операция над векторами, в результате которой образуется не вектор, а скаляр. Она определяется соотношением:

$$(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i;$$

Если отчеты дискретной функции представить в виде вектора **x**, то скалярное произведение **(x,x)** можно рассматривать как энергию этой функции. Аналогично, скалярное произведение векторов, представляющих две дискретные функции, есть взаимная энергия этих функций (функция корреляции).

Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Под матрицей $\mathbf{A_{mxn}}$ будем в общем случае понимать таблицу комплексных чисел, имеющую м строк и **n** столбцов. Матрицы обычно обозначаются прописными буквами (A, B, C), если у матрицы **m** строк и **n** столбцов, то она имеет обозначение $\mathbf{A}_{\mathbf{mxn}}$:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

Матрица $\mathbf{A_{ij}}$ называется:
- числовой, если ее элементы $\mathbf{a_{ij}}$ числа;
- функционной, если $\mathbf{a_{ij}}$ – функции,
- векторной, если $\mathbf{a_{ij}}$ – вектора.

Матрицы A и B называются равными, если их соответствующие элементы равны $\mathbf{a_{ij}}$ и $\mathbf{b_{ij}}$ ($\mathbf{a_{ij} = b_{ij}}$) и противоположной, т.е. A = -B, если $a_{ij} = -\mathbf{b_{ij}}$.

Если у матрицы **n = m**, то она называется квадратной, при этом матрицу $A_{\mathbf{nxn}}$ считают матрицей **n** – го порядка. Квадратная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

называется диагональной.

Квадратная матрица

$$
\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}
$$

называется единичной.

Если $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$, то матрица $\left[a_{ij}\right] = [0]$ называется нулевой или нуль матрицей.

Квадратные матрицы размером $n \times n$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}
$$

называются верхней и нижней треугольной матрицей соответственно.

Матрица

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \end{bmatrix}
$$

где числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ отличные от нуля, называется трапециевидной.

В квадратной матрице

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}
$$

элементы $a_{11}, a_{22}, \dots a_{n-1,n-1}, a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots a_{1n}$ – побочную диагональ матрицы.

Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, но если все элементы матрицы равны нулю, то она называется нулевой и обозначается **0.**

Если у матрицы **A** строки и столбцы поменять местами, то полученную матрицу $\mathbf{A^T}$ называют транспонированной. Следовательно:

$$\mathbf{A^T = [a_{ji}].}$$

Матрицы, удовлетворяющие условию:

$$A = A^T,$$

называются симметрическими. Если для двух матриц A и A^{-1} выполняется равенство:

$$AA^{-1} = \mathbf{1},$$

то матрица A^{-1} называется обратной к A.

Действительная матрица A со строками, имеющими равную энергию E, и обладающая свойством:

$$AA^T = E\mathbf{1},$$

называется ортогональной. Такая матрица обладает следующими свойствами:
- ее строки являются ортогональными векторами;
- обратная к ортогональной матрица также является ортогональной;
- произведение ортогональных матриц также ортогональная матрица.

1.2 Основные операции векторно-матричной алгебры.

Суммой (разностью) двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{mxn} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{mxn} = (c_{ij})$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

а произведением матрицы $A_{mxn} = (a_{ij})$ на скаляр **k** называется матрица C_{mxn}, элементы которой равны:

$$C_{mxn} = [a_{ij}k].$$

Произведением матрицы $A_{mxn} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{nxp} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{mxp} = (c_{ik})$:

$$c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}.$$

Операция умножения двух матриц существует только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Если A_{nxn}, B_{nxn}, то A * B и B * A всегда существует. Но произведение матриц в общем случае некоммутативно:

$$\mathbf{AB \neq BA}$$

поэтому небезразлично, как умножить матрицу A на B – справа или слева. Свойство ассоциативности при этом сохраняется.

Если одномерный массив B рассматривать как **N**-мерный вектор-столбец с элементами b_k , то операция вычисления векторно-матричного произведения матрицы A и вектора B определяется следующим образом:

$$c_i = \sum_{k=0}^{N-1} a_{ik} b_k .$$

Результатом данной операции является новый вектор-столбец С, при этом произведение матрицы на вектор в общем случае некоммутативно:

$$AB \neq BA$$

поэтому небезразлично, как умножить матрицу А на В – справа или слева. Свойство ассоциативности при этом сохраняется.

Важной операцией матричной алгебры является операция кронекеровкого произведения, которая в дальнейшем будет обозначаться знаком - $\otimes$. Для матриц A_{m1xm1} и B_{m2xm2} результатом кронекеровского произведения будет матрица $C_{m1m2xm1m2}$ с элементами:

$$C = A \otimes B = b_{ij}A.$$

Следовательно, при образовании кронекеровского произведения каждый элемент матрицы В скалярно умножается на матрицу А и полученные блоки объединяются в новую матрицу С размером м1м2хм1м2.

Примеры выполнения задания 1.

Задание 1.Элементы матричной алгебры.

Построить матрицу-циркулянт на основе вектора : 315

Вектор задания представляется в двоичном виде в алфавите **0 = 1; 1 = -1**

315 => 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 -1

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Счет строк ведем с 1.

Вычислить произведение матрицы-циркулянта А на пятую строку А5:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \\ 9 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Построить усеченные матрицы размером **3*3** из исходной матрицы-циркулянта (начало отсчета - вторая строка-второй столбец, шестая строка-второй столбец) и вычислить их произведение слева направо и справа налево:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вычислить кронекеровское произведение усеченных матриц $a \otimes b$

```
>> kron(a,b)

ans =          -1  -1   1   1   1  -1   1   1  -1
            1  -1  -1  -1   1   1  -1   1   1
            1   1  -1  -1  -1   1  -1  -1   1
            1   1  -1  -1  -1   1   1   1  -1
           -1   1   1   1  -1  -1  -1   1   1
           -1  -1   1   1   1  -1  -1  -1   1
           -1  -1   1   1   1  -1  -1  -1   1
```

1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1

2. Формализация задач цифровой обработки сигналов и изображений в матричном виде.

Для удачного решения рассмотренных задач необходимо в первую очередь обеспечить выполнение процедуры поиска и синхронизации сигнала в условиях ограниченных временных ресурсов.

В случае беспоисковой синхронизации принятый сигнал X длиной N может быть представлен в виде вектора $\overline{X} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^T$, а сигнальная матрица C – в виде матрицы-циркулянта, строками которой являются все возможные циклические сдвиги синхропоследовательности $\{c_i\}, i = 0,1,\ldots, N-1$:

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & \cdots & c_{N-2} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Формальной сущностью работы устройства синхронизации является вычисление вектора

$$\overline{Y} = C \times \overline{X} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})^T$$

и определение в полученном векторе номера максимальной компоненты, что технически эквивалентно определению временной задержки (фазы) принимаемого сигнала по отношению к опорному, на основе вычисления функции корреляции между принимаемым сигналом и рядом сдвинутых на величину интервала разрешения копий опорного сигнала .

Задача декодирования кода методом максимального правдоподобия сводится к определению номера максимальной компоненты вектора $B = (b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})^T$, который является результатом вычисления произведения матрицы кодовых слов G размером $N \times m$ (N – мощность кода; ***m*** – длина кода) на принятое слово. При этом матрица кодовых слов имеет вид:

$$G = \begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,m-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{0,m-1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ g_{N-1,0} & g_{N-1,2} & \cdots & g_{N-1,m-1} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, при декодировании методом максимального правдоподобия определяется корреляционная функция между принятым кодовым словом и всеми словами кодового словаря. В качестве принятого сообщения выбирается слово, соответствующее максимальному значению корреляционной функции.

Поиск объектов на изображении методом сопоставления с эталоном является одним из основных методов обнаружения и широко используется при решении различных прикладных задач. При этом эталон сравнивается со всеми объектами, находящимися на изображении, путем последовательного перемещения по изображению, как правило, слева направо, сверху вниз. В качестве оценочной величины используется взаимная корреляция между входным и эталонным изображениями.

Корреляционный способ координатной привязки изображений состоит в поэлементном сравнении двух изображений одного и того же объекта, полученного различными датчиками или же в разное время. При этом формируется величина, измеряющая корреляцию между двумя изображениями, и находится положение максимума функции корреляции. Сигналы, характеризующие корреляцию, поступают в автоматическое устройство, которое изменяет взаимную ориентацию эталонных и реальных объектов до тех пор, пока показатель их совпадения (функция корреляции) не превысит значения пороговой величины. Поэтому в общем случае рассмотренные задачи обработки изображений предполагают не только вычисление взаимной корреляции, но и последующее сравнение ее значения с пороговым уровнем.

Следует отметить, что корреляционная обработка наиболее подходит для растрового представления объекта. Растровое изображение в общем случае – это двумерная матрица, состоящая из большого числа пространственно упорядоченных дискретных элементов, каждый из которых при одинаковых размерах может иметь отличное от других элементов значение оптических характеристик (цвет, насыщенность и проч.).

Растровое представление изображения предпочтительно для цифровой обработки, поскольку обладает рядом существенных преимуществ по сравнению с векторным представлением:

— отсутствие потери информации о распознаваемых объектах;

— простота вычисления ряда параметров;

— отсутствие необходимости в громоздких растр-векторных преобразованиях, которые зачастую занимают большую часть времени, отведенную на обработку изображений.

В общем случае взаимная корреляция между двумя растровыми изображениями $S_{n1,n2}$ и $X_{n1,n2}$ определяется как [2]

$$R_{s,x}[\tau_1,\tau_2]=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} S_{n1,n2}X_{n1-\tau1,n2-\tau2}.$$

Для поиска объекта размером $m\times n$ на изображении размером $M\times N$ функцию корреляции требуется вычислить для всех $(M-m+1)\cdot(N-n+1)$ смещений окна в зоне поиска.

Формальная постановка задач корреляционного анализа сигналов и изображений весьма схожа – и в том, и в другом случае осуществляется вычисление функции корреляции эталонного и принятого сигналов, а принятие решения осуществляется на основе её сравнения с пороговым уровнем. Схожесть задачи корреляционного анализа сигналов и изображений усиливается при использовании векторно-матричного представления для вычисления корреляционных функций изображений. При обработке изображений матрица коэффициентов корреляции формируется в результате вычисления произведения растровых матриц эталона и полученного изображения, что, по сути, является специальной формой двумерной обработки сигнала, используемой для извлечения информации об изображении.

Основной недостаток корреляционных методов обработки состоит в том, что при обработке требуются значительные вычислительные, а следовательно, и временные затраты для решения практических задач. Особенно это становится заметным при обработке изображений из-за многомерности представления информации.

Задание 2. Анализ и формализация типовых задач цифровой обработки.

Представить формализацию задачи декодирования для полученной ранее бинарной матриц и строки, указанной в задании **2** (строка **6**) методом максимального правдоподобия.

Умножим матрицу-циркулянт сигнала A на принятый вектор A_6=C и узнаем определим уровень корреляции:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A_6 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C \cdot \frac{1}{9} = \begin{pmatrix} 0.111 \\ 0.111 \\ 0.111 \\ -0.333 \\ -0.333 \\ 1 \\ -0.333 \\ -0.333 \\ 0.111 \end{pmatrix}$$

Максимальный нормированный уровень корреляции наблюдается в **6** строке, значит сигнал задержен на **6** тактов.

Представить формализацию задачи декодирования кода, полученного на основе циркулянта строки кода Баркера длины **N = 13** и кодового слова с номером согласно варианта (строка **4**):

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Из полученного результата (вектор D) видно, что был принят сигнал в четвертой строке, поскольку уровень корреляции максимален для компоненты с номером 4.

Представить формализацию задачи обнаружения фрагмента изображения на основе матричной алгебры для пиксельного изображения соответствующего циркулянту задания **1 (**Андреевский крест размером **3*3):**

Для обнаружения изображения используется поэлементное сравнение изображения A с образцом x.

$$x := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Набор коэффициентов корреляции для различных смещений образца по изображению составляет:

$K_{1.1}$ = 8-1 = 7

$K_{1.2}$ = 3-6 = -3

$K_{1.3}$ = 4-5 = -1

$K_{1.4}$ = 6-3 = 3

$K_{1.5}$ = 5-4 = 1

$K_{1.6}$ = 4-5 = -1

$K_{1.7}$ = 3-6 = 3

$K_{2.1}$ = 0-9 = -9

$K_{2.2}$ = 8-1 = 7

$K_{2.3}$ = 3-6 = -3

$K_{2.4}$ = 4-5 = -1

$K_{2.5}$ = 5-4 = 1

$K_{2.6}$ = 5-4 = 1

$K_{2.7}$ = 4-5 = -1

$K_{3.1}$ = 8-1 = 7

$K_{3.2}$ = 0-9 = -9

$K_{3.3}$ = 8-1 = 7

$K_{3.4}$ = 3-6 = -3

$K_{3.5}$ = 4-5 = -1

$K_{3.6}$ = 5-4 = 1

$K_{3.7}$ = 5-4 = 1

$K_{4.1}$ = 3-6 = -3

$K_{4.2}$ = 8-1 = 7

$K_{4.3}$ = 0-9 = -9

$K_{4.4}$ = 7-2 = 5

$K_{4.5}$ = 3-6 = -3

$K_{4.6}$ = 4-5 = -1

$K_{4.7} = 5-4 = 1$

$K_{5.1} = 4-5 = -1$	$K_{6.1} = 5-4 = 1$	$K_{7.1} = 5-4 = 1$
$K_{5.2} = 3-6 = -3$	$K_{6.2} = 4-5 = -1$	$K_{7.2} = 5-4 = 1$
$K_{5.3} = 8-1 = 7$	$K_{6.3} = 3-6 = -3$	$K_{7.3} = 4-5 = -1$
$K_{5.4} = 0-9 = -9$	$K_{6.4} = 8-1 = 7$	$K_{7.4} = 3-6 = -3$
$K_{5.5} = 8-1 = 7$	$K_{6.5} = 0-9 = -9$	$K_{7.5} = 8-1 = 7$
$K_{5.6} = 4-5 = -1$	$K_{6.6} = 8-1 = 7$	$K_{7.6} = 0-9 = -9$
$K_{5.7} = 4-5 = -1$	$K_{6.7} = 2-7 = -5$	$K_{7.7} = 8-1 = 7$

Максимальный уровень корреляции **7**, следовательно совпадений нет и искомое изображение не обнаружено, но т.к. наблюдается уровень корреляции **-9** ,то в данном сигнале присутствует инверсное искомое изображение.

3.Факторизация матриц как средство сокращения вычислительной сложности процедур обработки цифровых сигналов.

Факторизация методом Гуда возможна для матриц, представляющих собой кронекеровское произведение нескольких одинаковых матриц, и основана на следующих теоремах [1].

Теорема 2.1. Если E_m произвольная матрица размером $m \times m$, то

$$E_m^n = \underbrace{E_m \otimes E_m \otimes \ldots \otimes E_m}_{n\ раз} = B_{m^n}^n,$$

где $\otimes$ – знак кронекеровского произведения двух матриц.

Другими словами, n-я кронекеровская степень матрицы E_m размером $m \times m$ равна обычной n-й степени матрицы B_{m^n} размером $m^n \times m^n$.

Теорема 2.2. Если E_m произвольная матрица размером $m \times m$, то

$$E_m^n = \underbrace{E_m \otimes E_m \otimes \ldots \otimes E_m}_{n\ раз} = C_{m^n}^1 \cdot C_{m^n}^2 \ldots . C_{m^n}^{n1},$$

где $C_{m^n}^1 = E_m \otimes 1_m \otimes \ldots \otimes 1_m$; $C_{m^n}^2 = 1_m \otimes E_m \otimes \ldots \otimes 1_m$; $C_{m^n}^n = 1_m \otimes 1_m \otimes \ldots \otimes E_m$.

Здесь 1_m – единичная матрица размером $m \times m$; $C_{m^n}^1$, $C_{m^n}^2$, ..., $C_{m^n}^n$ – матрицы размером $m^n \times m^n$.

Особенностью матриц B_{m^n} и матриц $C_{m^n}^{1}$, $C_{m^n}^{2}$, ..., $C_{m^n}^{n}$ является то, что они имеют не больше m^{n+1} отличных от нуля элементов, поэтому общее число операций типа сложение/вычитание не превышает величины $n \times m^n$.

Важным классом бинарных матриц, получивших широкое практическое применение, являются матрицы Адамара.

Матрица Адамара размером $2^n \times 2^n$ задается как *n*-я кронекеровская степень матрицы размером 2×2 [1]:

$$H_{2^n} = E_2^{\,n},$$

где $E_2^{\,n} = E_2^{\,1} \otimes E_2^{\,2} \otimes \ldots \otimes E_2^{\,i} \otimes \ldots \otimes E_2^{\,n}$.

$$E_2^{\,i} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица Адамара размером 8*8 имеет вид:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

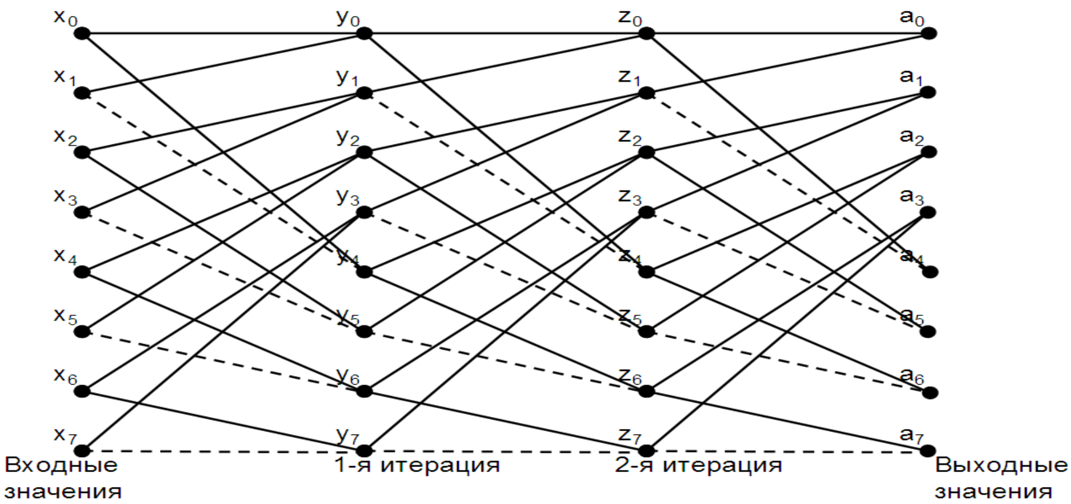
Пример 3.2.1.Согласно теореме 1. матрица А раскладывается на произведение трех слабозаполненных сомножителей:

A=B3*B2*B1=B3

где:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Граф вычислительного процесса представляет в этом случае следующую структуру:



Пример 3.2.2. Согласно теореме 2 матрица A факторизуется следующим образом:

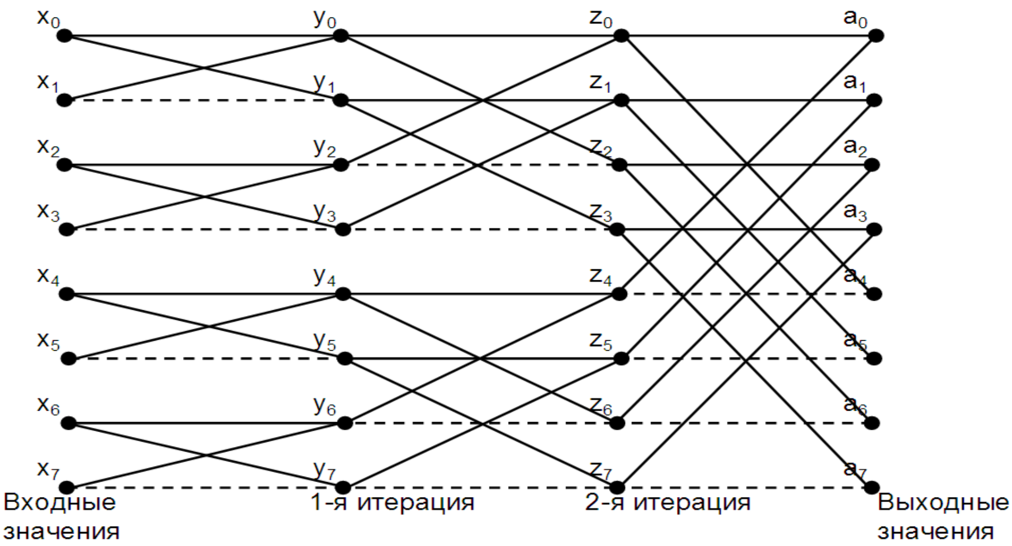
$$A = C_8^{(1)} \cdot C_8^{(2)} \cdot C_8^{(3)}$$

где:

$$C_8^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C_8^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & & & & \\ & 1 & & 1 & & & & \\ 1 & & -1 & & & & & \\ & 1 & & -1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & & -1 & \\ & & & & & 1 & & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_8^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 \\ 1 & & & & -1 & & & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & 1 & & & & -1 & \\ & & & 1 & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Граф вычислительного процесса представляет в этом случае следующую структуру:



Вычисление векторно-матричного произведения при использовании рассмотренных методов факторизации матриц Адамара требует выполнения 24 операций типа сложение-вычитание. Прямой метод умножения вектора на матрицу А предполагает 56 вычислений.

Обобщенный метод факторизации произвольных бинарных матриц

Пусть $A=[a_{ij}]$ – матрица размером $N \times m$ с элементами $a_{ij}=\pm 1{,}0$. Строку с номером i обозначим a_i. Элементы a_{ij} и a_{lj} назовем инверсными, если $a_{ij}=-a_{lj}$. Если все элементы строки a_l инверсны с соответствующими элементами строки a_i, т.е. $a_i=-a_l$, то строка с номером i инверсна строке с номером l.

Лемма Произвольную матрицу A размером $N \times m$, состоящую из элементов $\pm 1{,}0$, можно представить в виде произведения

$$A = D \cdot B,$$

где B – матрица размером $N_1 \times m$, $(N_1 \le N)$, полученная из матрицы A после вычеркивания повторяющихся и инверсных строк; D – матрица размером $N \times N_1$ с элементами

$$d_{lj} = \begin{cases} 1, & b_j = a_l; \\ -1, & b_j = -a_l; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Справедливость леммы становится очевидной, если заметить, что матрица D фактически представляет собой комбинацию перестановочных матриц, размещающих строки матриц B с инверсиями или повторениями в матрице A. В каждой строке матрицы D содержится только один ненулевой элемент.

Пример 2.1. Представим матрицу A в виде произведения двух сомножителей:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотренные в УМК «Основы матричного анализа» теоремы **2.9** и **2.10** позволяют сформулировать следующий метод факторизации бинарной матрицы A размером $N \times m$:

1. *Блок формирования матрицы А.* В этом блоке формируется циркулянт бинарного (троичного сигнала) либо матрица кодовых слов.

2. *Деление входной матрицы на блоки.* Разбиваем входную матрицу *А* на блоки A_j, которые включают в себя попарно соседние столбцы (в общем случае). При этом если $m \neq 0 \mod 2$, то один из блоков (возможно, последний) состоит из одного столбца. Число блоков P равно

$$P = \begin{cases} \dfrac{m}{2}, & \text{если } m = 0 \bmod 2; \\ \left\lceil \dfrac{m}{2} \right\rceil + 1, & \text{если } m \neq 0 \bmod 2. \end{cases}$$

Формируются вспомогательные матрицы B_j, которые получаются вычеркиванием повторяющихся и инверсных строк.

3. *Формирование матрицы-сомножителя* Q_i. Составляется блочно-диагональная матрица и выводится потребителю в качестве матрицы-сомножителя.

4. *Формирование матрицы **D**.* Образуем матрицу D с блоками D_i из вспомогательных матриц B_j и блоков матрицы A_j. Для этого каждую строку блока A_j сравниваем со строками B_j и получаем элемент d_{lr} по следующему правилу:

$$d_{lr} = \begin{cases} 1, & b_r = a_l; \\ -1, & b_r = -a_l; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Количество столбцов в блоке D_j равно количеству строк во вспомогательной матрице B_j**,** поэтому индекс r при элементе d_{lr} указывает на номер столбца в блоке D_j**.**

5. *Передача матрицы* D_j**.** Сформированная матрица D_j передается в качестве входной на итерацию **2.**

6. *Контроль шагов **i**.* Проверяется число шагов i**.** Если $i < \lceil \log_2 m \rceil$**,** то $i = i + 1$ и переход к шагу **5,** в противном случае процесс разложения матрицы на сомножители завершен**.**

Пример 2.3. Факторизуем матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Разбиваем матрицу A на блоки**:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & -1 & 1 & : & -1 \\ -1 & -1 & : & 1 & 1 & : & -1 \\ 1 & -1 & : & -1 & -1 & : & 1 \\ 1 & -1 & : & -1 & -1 & : & -1 \\ -1 & -1 & : & 1 & -1 & : & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Образуем вспомогательные матрицы B_j и **1-**й сомножитель факторизации**:**

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Образуем матрицу D из вспомогательных матриц B_j и произведем новое разбиение на блоки d_i**:**

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 0 & -1 & : & -1 \\ -1 & 0 & : & 1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & : & -1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & : & -1 & 0 & : & 1 \\ -1 & 0 & : & 0 & 1 & : & -1 \end{bmatrix}.$$

Получим вспомогательные матрицы B_j из нового разбиения D и составим **2-**й сомножитель факторизации:

$$Q_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Окончательно получим:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $X=[x_0,\quad x_1,\quad \ldots,\quad x_4]$. Тогда для вычисления векторно-матричного произведения на исходную матрицу требуется выполнение **20-**ти операций сложения **(**вычитания**),** а при умножении на факторизованную матрицу только **12.**

Преобразования в базисе ДЭФ

Система дискретных экспоненциальных функций **(**ДЭФ**)** определяется следующим выражением:

$$\mathbf{def(k,n)\ =\ exp(\text{-}j}\frac{2\pi}{N}\mathbf{kn)\ =\ cos}\frac{2\pi}{N}\mathbf{kn\ -\ jsin}\frac{2\pi}{N}\mathbf{kn,}$$

где: **k,n -** номер функции и номер отсчета соответственно**,** причем обе переменные принимают целочисленные значения **k,n = (0,1,2,...,N −1)** так**,** что число функций в системе равно числу отсчетов каждой функции**;**

Введем обозначение

$$\mathbf{W} = \exp(-\mathbf{j}\frac{2\pi}{N}),$$

тогда $\mathbf{def(k,n)} = \mathbf{W^{kn}}$.

ДЭФ является комплексной функцией. Ее модуль равен **1**, а фаза $\varphi(k,n) = (2\pi / N)kn$ полностью определяет все свойства функции.

Величина $\mathbf{W^{kn}}$ называется поворачивающимся множителем, т.к. подобно обычным комплексным экспоненциальным функциям ДЭФ можно изобразить на плоскости в виде вращающегося вектора единичной длины. Проекции данного вектора на оси абсцисс и ординат дают действительную и мнимую части функций. Разница заключается в том, что у обычных функций этот вектор вращается непрерывно, а в случае ДЭФ – дискретно, проходя при

изменении **n** на единицу угол $2\pi k / N$ рад. В общей сложности на интервале **n** вектор проходит угол $2\pi k$ рад, т.е. совершает ровно ***k*** оборотов.

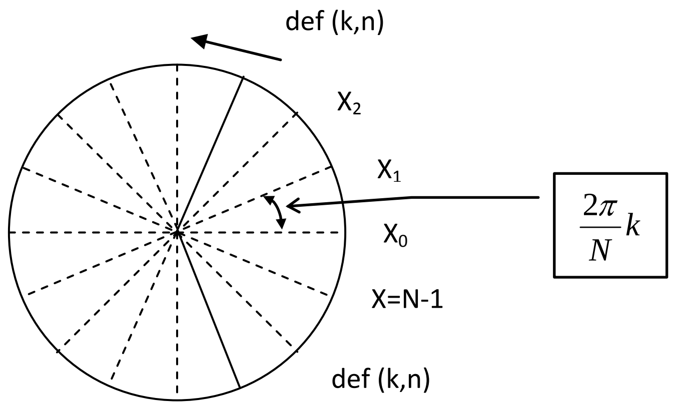


Рисунок 6.2. Размещение поворачивающих множителей на единичной окружности

Всю систему ДЭФ можно записать в виде матрицы **V**, строки которой нумеруются переменной **k** , столбцы переменной **n**, а в пересечении **k**-й строки и **n**-го столбца записана величина $\mathbf{W^{kn}}$:

$$
V = \begin{array}{c c}
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ N-1 \end{matrix} &
\begin{bmatrix} & & \\ & W^{kn} & \\ & & \end{bmatrix} \\
 & 0 1 .. \; n .. \; N-1
\end{array}.
$$

Например, для **N = 8** матрица **V** имеет следующий вид:

$$
\mathbf{V_8} = \begin{bmatrix}
W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\
W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\
W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\
W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\
W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\
W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\
W^0 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\
W^0 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\
W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^1 \\
W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^0 & W^2 & W^4 & W^2 \\
W^0 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^3 \\
W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 \\
W^0 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\
W^0 & W^6 & W^4 & W^2 & W^0 & W^6 & W^4 & W^2 \\
W^0 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1
\end{bmatrix}.
$$

Такое представление называется матричным представлением ДЭФ.

Система ДЭФ может определятся на любом интервале **N**, как четном, так и нечетном. Например, при **N = 5** матрица ДЭФ с минимальными фазами имеет вид

$$
\mathbf{V_5} = \begin{bmatrix}
W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\
W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 \\
W^0 & W^2 & W^4 & W^1 & W^3 \\
W^0 & W^3 & W^1 & W^4 & W^2 \\
W^0 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1
\end{bmatrix}
$$

При четном **N** система ДЭФ состоит из двух действительных функций **def(0,n)** и **def(N/2,n)**, и **N/2-1** пар комплексно сопряженных функций. При нечетном **N** она содержит только одну действительную функцию **def(0,n)**, а остальные **N-1** функций образуют **(N-1)/2** комплексно-сопряженных пар. Во всех случаях комплексно-сопряженные функции **def(k,n)** и **def(k*,n)** расположены симметрично на интервале **N**, а именно **k* = N-k**. Числа **k** и **k*** являются противоположными по модулю **N**. Следовательно, фаза ДЭФ является нечетной функцией на интервале **N**.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) устанавливает связь между временными и частотным представлениями сигнала при разложении его в ряд по гармоническим функциям. Пара дискретного преобразования Фурье последовательности **{s(n)} = {s(0), s(l), ..., s(N – 1)}** определяется следующими равенствами:

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) W^{kn}, \; k = 0,1, \ldots, N-1;$$

$$s(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-kn}, \; n = 0,1, \ldots, N-1;$$

Последовательность **{s(n)}** представляет собой отсчеты сигнала, а последовательность **{f(k)} —** дискретный спектр. Означенные равенства представляют собой экспоненциальную форму записи ДПФ. Соответствующее матричное представление имеет вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{VS};$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{N^{-1}V^{*}F},$$

где $\mathbf{S} = [s(0), s(1), \ldots, s(N-1)]^T$; $\mathbf{F} = [f(0), f(1), \ldots, f(N-1)]^T$ **–** векторы-столбцы отсчетов сигнала и спектральных коэффициентов соответственно.

Пример **6.1.** Вычислить спектр сигнала $\mathbf{S = [1,1,-1,1]^T}$ на основе ДПФ и обратное преобразование Фурье для полученного спектра.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{4^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{4^{-1}} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$