Материалы для самостоятельной подготовки по дисциплине «Теория электрических цепей» для студентов специальностей: 1-36 04 02з «Промышленная электроника» (1 часть), 1-39 02 01с «Моделирование и компьютерное проектирование РЭС»

1 Исследование электрической цепи при помощи уравнений Кирхгофа

Основными законами на базе которых разработаны методы исследования цепей являются закон Ома и законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа вытекает из принципа непрерывности тока (рис. 1.1).

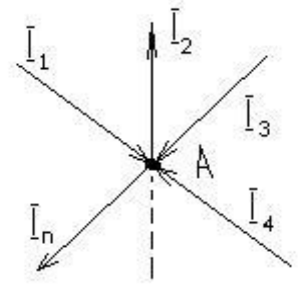


Рис. 1.1 Графическое отображение принципа непрерывности тока.

В узле электрической цепи А, где сходится n проводов, не может быть накопления зарядов; следовательно сумма зарядов, протекающих в любой момент времени к узлу А равна сумме зарядов, уходящих из узла А. на основании этого формируется первый закон Кирхгофа.

Алгебраическая сумма токов в проводах, сходящихся в любом узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{1}^{k=n} I_k = 0 \tag{1.1}$$

При этом токи, текущие к узлу следует брать с одним знаком, а токи, текущие от узла, – с другим знаком.

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между результирующей ЭДС, действующей в замкнутой электрической цепи, и произведениями токов в ветвях цепи на сопротивление ветвей.

В рассматриваемой замкнутой электрической цепи ABCD (рис. 1.2) действуют три ЭДС: E_1, E_2, E_4. две из них E_1 и E_2 действуют в одном направлении, а E_4 – навстречу, следовательно, выбирая направление обхода контура ABCD и считая ЭДС, действующей в направлении обхода положительными, а ЭДС, действующей в обратном направлении, – отрицательной, результирующая ЭДС равна:

$$E = E_1 + E_2 - E_4.$$

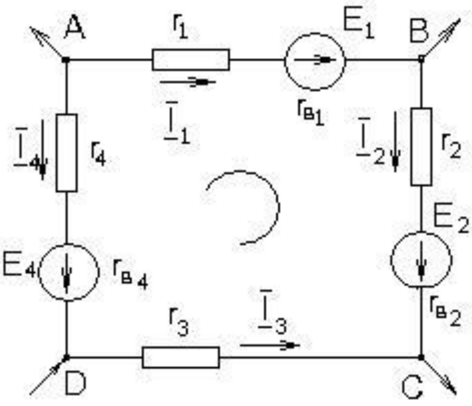


Рис. 1.2 Пример замкнутой электрической цепи.

В соответствии с законом Ома:

$$E = E_1 + E_2 - E_4 = I_1(r_1 + r_{в1}) + I_2(r_2 + r_{в2}) - I_3 r_3 - I_4(r_4 + r_{в4})$$

Обобщая данное выражение на любое число ветвей получаем второй закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма ЭДС, действующих в любом замкнутом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжений в ветвях этого контура.

Для цепи с n ветвями:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} I_k r_k \qquad (1.2)$$

При последовательном соединении сопротивлений в цепи (рис. 1.17) значение тока во всех резисторах одинаково.

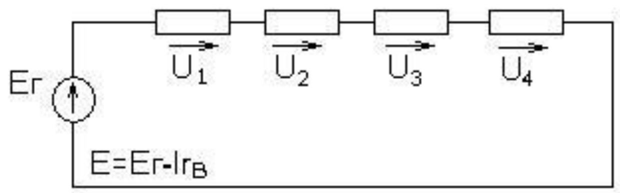


Рис. 1.3 Последовательное соединение в цепи постоянного тока.

По второму закону Кирхгофа:

$$E = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = Ir_1 + Ir_2 + Ir_3 + Ir_4 = I(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = Ir,$$

Следовательно, при последовательном соединении резисторов общее сопротивление цепи равно сумме сопротивлений этих резисторов:

$$r = \sum_{k=1}^{n} r_k \qquad (1.3)$$

Напряжение на отдельных участках цепи по закону Ома:

$$U_1 = Ir_1;\ U_2 = Ir_2;\ U_3 = Ir_3;\ U_4 = Ir_4;$$

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k = I^2 r_1 + I^2 r_2 + I^2 r_3 + I^2 r_4 + \ldots + I^2 r_n$$

Для параллельно соединенных резисторов напряжение на зажимах всех параллельных участков одинаково (рис.1.3):

$$U = I_1 r_1 = I_2 r_2 = I_3 r_3 = I_4 r_4$$

в соответствии с первым законом Кирхгофа

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{U}{r_1} + \frac{U}{r_2} + \frac{U}{r_3} + \frac{U}{r_4} = U(g_1 + g_2 + g_3 + g_4)$$

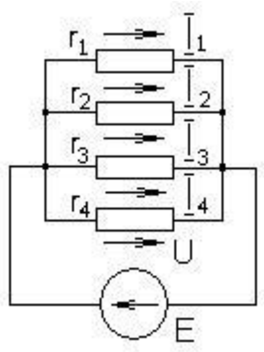


Рис. 1.4 Параллельное соединение резисторов.

При параллельном соединении резисторов (1.4) общая проводимость цепи равна сумме проводимостей параллельных ветвей.

$$g = \sum_{k=1}^{n} g_k \text{ или } r = \frac{1}{g} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} g_k} \qquad (1.4)$$

Токи параллельных ветвей по закону Ома:

$I_1 = Ug_1;\ I_2 = Ug_2;\ I_3 = Ug_3; \ldots I_n = Ug_n; =>$

$$I_1 = I\frac{g_1}{g};\ I_2 = I\frac{g_2}{g}; \ldots I_n = I\frac{g_n}{g}; \qquad (1.5)$$

(если дан общий ток, отдельные токи в ветвях распределены пропорционально проводимостям)

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} I_k^2 r_k = \sum_{k=1}^{n} U^2 g_k \qquad (1.6)$$

Для простейшего смешанного соединения резисторов в цепи постоянного тока (рис. 1.5):

$$r_{23} = \frac{1}{1/r_2 + 1/r_3} = \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$

Общее сопротивление цепи $r = r_1 + \dfrac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}$

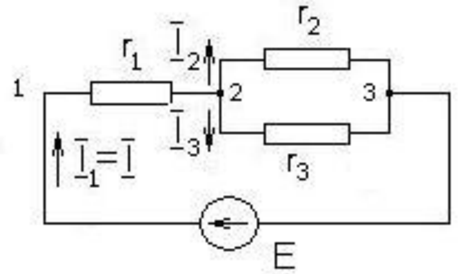


Рис. 1.5 Смешанное соединение резисторов.

Сначала находятся эквивалентные сопротивления параллельных участков, затем эквивалентное сопротивление цепи определяется как сумма найденных эквивалентных сопротивлений и сопротивлений других одиночных резисторов, включенных последовательно.

Метод составления и решения уравнений по законам Кирхгофа

Общее число уравнений должно быть равно числу неизвестных токов, т.е. числу ветвей цепи. Число уравнений, составляемые по первому закону Кирхгофа, равно числу узлов цепи минус один (n-1 уравнений). Остальные уравнения составляются по второму закону Кирхгофа (рис.1.6).

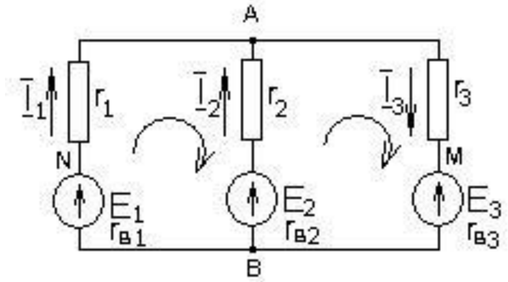


Рис. 1.6 Пример схемы.

Считаем, что E_1, E_2, E_3 – известны;

$r_{в1}$, $r_{в2}$, $r_{в3}$ – известны;

r_1, r_2, r_3 – известны

Необходимо определить токи: I_1, I_2, I_3 – ?

Зададим направление токов. Если выбранные направления токов окажутся противоположны действительным, то при решении уравнений получим значения этих токов со знаком «–», следовательно, токи текут в обратном направлении.

Цепь имеет два узла – точку А и В. По первому закону Кирхгофа составляется одно уравнение, т.к. уравнение для точки А и В одинаковы.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

По второму закону Кирхгофа:

Для первого контура, второго контура и контура AmBnA, то уравнение для контура AmBnA является следствием из уравнений для I контура и уравнения для II контура, следовательно, выбрав направление обхода имеем

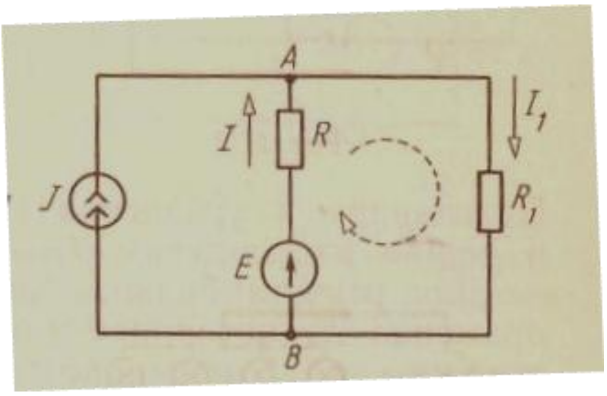
$$I_1(r_1 + r_{в1}) - I_2(r_2 + r_{в2}) = E_1 - E_2$$

$$I_2(r_2 + r_{в2}) - I_3(r_3 + r_{в3}) = E_2 - E_3$$

При совместном решении:

$$I_1 = \frac{(E_1 - E_2)(r_2 + r_{в2} + r_3 + r_{в3}) + (E_2 - E_3)(r_2 + r_{в2})}{(r_1 + r_{в1})(r_2 + r_{в2}) + (r_2 + r_{в2})(r_3 + r_{в3}) + (r_3 + r_{в3})(r_1 + r_{в1})}$$

ПРИМЕР 1: Для цепи пользуясь законами Кирхгофа, найти токи и проверить баланс мощностей. Дано: *E=20 В, J=2А*, *R=15 Ом*, *R_1=85 Ом.*



Решение: Выберем положительные направления токов и составим уравнения по законам Кирхгофа. Цепь содержит три ветви ($N_в$=3), и два узла *A* и *B* ($N_у$=2), один источник тока (N_T=1). Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, *У*= $N_у$-1=1, а по второму закону Кирхгофа: К=$N_в$-$N_у$+*1*-N_T=3-2+1-1=1. Уравнение для узла А

$I_1 - J - I = 0$

Независимый контур выбираем так, чтобы он не содержал источника тока. Для него составляем уравнение второго закона Кирхгофа:

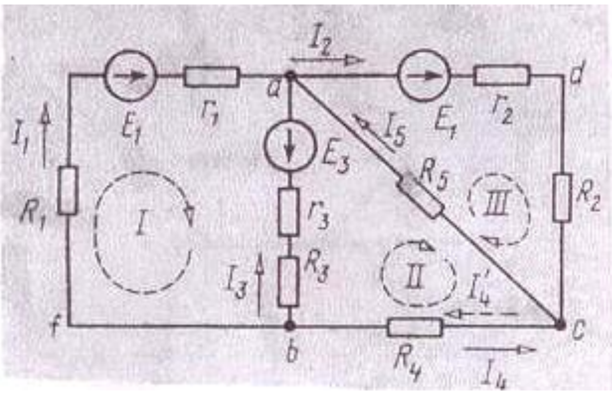
$IR + I_1R_1 = E$

Подставляя в уравнения цифровые значения и решив их, получим:

$I = -1{,}5A$: $I_1 = 0{,}5A$.

Для расчета баланса мощностей необходимо знать напряжение на источнике тока, которое находим по ветвям, внешним по отношению к зажимам источника тока. Напряжение на нем $U_{AB} = I_1R_1$=42,5В. Составляем баланс мощностей: $U_{AB}\ J + EI = I^2R + I^2_1R_1$. Подставляя числовые значения, находим: $42{,}5\cdot 2+20\cdot(-1{,}5)=(-1{,}5)^2 15+0{,}5^2\cdot 85$. Получим тождество: 55=55.

ПРИМЕР 2:



Для цепи схемы пользуясь законами Кирхгофа, найти токи и проверить баланс мощностей, если $E_1=15B$, $E_2=70B$, $E_3=5B$, $r_1=r_2=1Ом$, $r_3=2Ом$, сопротивления элементов в цепи: $R_1=5Ом$, $R_2=4Ом$, $R_3=8Ом$, $R_4=2,5Ом$, $R_5=15Ом$.

Решение: Всего на схеме цепи 5 ветвей (N_B=5:bfa, adc, ba, bc, ca), число узлов $N_у$=3(a, b, c), источников тока нет ($N_т$=0), число неизвестных токов равно $N_B-N_т=5$. Число независимых уравнений составляемых по второму закону Кирхгофа равно 3 (К= $N_B-N_у+1$- $N_у$=5-3+1=3). Таким образом, общее число независимых уравнений, составляемых по первому и второму законам Кирхгофа, равно числу независимых токов в пяти ветвях схемы.

Обозначим стрелками положительные направления токов и направления обхода трех независимых контуров: I, II, III. Составим систему уравнений Кирхгофа:

для узлов

a

$-I_1+I_2-I_3-I_5=0;$

b

$I_1+I_3+I_4=0;$

для контуров

I

$(R_1+r_1)I_1-(R_3+r_3)I_3=E_1+E_3$

II

$(R_3+r_3)I_3-R_4I_4-R_5I_5=-E_3$

III

$(R_2+r_2)I_2+R_5I_5-R_5I_5=E_2$

Уравнения после подстановки в них числовых значений имеют следующий вид:

$-I_1+I_2-I_3-I_5=0$, $I_1+I_3+I_4=0$

$6I_1-10I_3=20$, $10I_3-2,5I_4-15I_5=-5$

$5 I_2+15 I_5=70$

Решая эту систему уравнений, получим I_1=5А; I_2=8А; I_3=1А; I_4=-6А; I_5=2А.

Отрицательный знак для I_4 означает, что истинное направление тока в R_4 противоположно принятому. Оно обозначено I_4' и показано на схеме штриховой стрелкой.

При проверке баланса мощностей надо иметь в виду, что в тех ветвях цепи, где направление тока совпадает с направлением ЭДС, соответствующая ЭДС является источником энергии, а в тех участках, где направления ЭДС и тока противоположны, ЭДС – потребитель энергии. Все сопротивления, как внешние, так и источников энергии независимо от направления протекающего через них тока будут потребителями энергии.

Баланс мощностей для рассматриваемой схемы:

$$E_1 I_1+ E_2 I_2 -E_3 I_3= I_1^2(R_1+r_1)+ I_2^2(R_2+r_2)+ I_3^2(R_3+r_3)+ I_4^2R_4+ I_5^2R_5;$$

или $15\cdot 5+70 \cdot 8-5\cdot 1=5^2 \cdot 6+8^2 \cdot 5 +1^2 \cdot 10 +6^2 \cdot 2,5 +2^2 \cdot 15$;
получено тождество 630=630

2 Резонанс в электрических цепях.

Резонансом в электрических цепях называется режим участка электрической цепи, содержащей индуктивный и емкостной элементы, при котором разность фаз φ (угол сдвига фаз) напряжения и тока участка равны нулю.

Резонанс напряжений возможен на участке цепи с последовательным соединением элементов, параметры которых R, L, C, т.е в последовательном контуре (рис. 2.1).

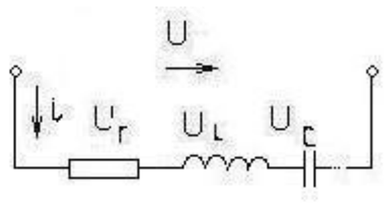


Рис. 2.1 Последовательный R, L, C контур

Активное сопротивление R, показанное на схеме рис. 2.1 отдельно, может быть как сопротивление специально включенного резистора, так и сопротивлением проводов катушки индуктивности.

Из определения следует, что угол сдвига фаз при резонансе равен нулю. Такой угол сдвига фаз можно получить тремя способами:

1. изменением частоты ω напряжения питания;
2. изменением L;
3. изменением C.

При $\varphi = 0$ из выражения $\varphi = arctg\frac{X_L - X_C}{r}$ следует, что $X_L = X_C$. Т.к $X_L = \omega L$, а $X_C = \frac{1}{\omega C}$, то при резонансе

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \tag{2.1}$$

где ω_0 – резонансная частота.

Сопротивление реактивного элемента при резонансной частоте называется ***характеристическим*** сопротивлением последовательного контура.

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.2}$$

Отношение характеристического сопротивления к активному сопротивлению контура называется добротностью последовательного контура

$$Q = \rho / r \tag{2.3}$$

Рассмотрим характерные особенности режима резонанса напряжений:

1. Т.к $\varphi = 0$, то $\cos\varphi = 1$ и суммарное сопротивление участка цепи активное, т.е полное сопротивление при резонансе равно активному сопротивлению $Z_{рез} = \sqrt{r^2 + (X_L - X_C)^2} = r$ и минимально при заданном сопротивлении R.

2. Ток $I_{рез} = U / Z_{рез} = U / r$ максимален. Это свойство позволяет обнаружить резонанс напряжений при изменении ω, L, C. Однако, резонансный ток при определенных условиях опасен – он может привести к перегреву элементов цепи и выводу их из строя.

3. Напряжение на отдельных участках контура:

$$U_a = rI_{рез};\ U_L = X_L I_{рез};\ U_C = X_C I_{рез}; \qquad (2.4)$$

Т.к. при резонансе $X_L = X_C$,то напряжения на участках контура с реактивным сопротивлением равны $U_L = U_C$, напряжение на участках с активным элементом $U_a = U_{питания}$ на выводах контура и совпадает с ним по фазе.

$$\overset{*}{U} = U_a + j(U_L - U_C) = U_a \qquad (2.5)$$

Если $X_L = X_C > r$, то $X_L = X_C > U_a = U$, т.е напряжение на участках с реактивными элементами больше, чем $U_{питания}$. Это свойство – усиление напряжения –является важнейшей особенностью резонанса и широко используется в технике, отсюда и название этого явления.

Коэффициент усиления равен добротности контура

$$U_L / U = X_L I_{рез} / rI_{рез} = X_L / r = \rho / r = Q \qquad (2.6)$$

Значительное повышение напряжения на реактивных элементах может привести к пробою изоляции и опасно для обслуживающего персонала.

4. Активная мощность при резонансе максимальна, т.к $P = rI_{рез}^2$, а ток $I_{рез}$ максимален.

Реактивные мощности равны, т.к $X_L I_{рез}^2 = X_C I_{рез}^2$ равны, но положительны по знаку мгновенной реактивной мощности.

$$P_L = U_L I_{рез} \sin 2\omega t;\ P_C = -U_C I_{рез} \sin 2\omega t; \qquad (2.7)$$

Это значит, что в те интервалы времени, в течение которых энергия накапливается в магнитном поле индуктивного элемента, она поступает из электрического поля емкостного элемента. Происходит обмен энергией между реактивными элементами контура.

Источник питания в этом обмене не участвует

Векторные диаграммы контура с R,L,C при резонансе напряжений строится с учетом особенностей режима $\varphi = 0, \overset{*}{U}_C = -\overset{*}{U}_L ; \overset{*}{U}_a = -\overset{*}{U}$ (рис.2.2).

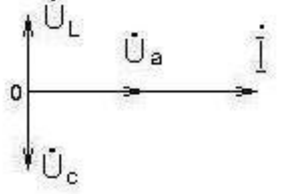


Рис. 2.2 Векторная диаграмма R, L, C контура

Резонанс токов возможен в цепи с параллельным соединением двух ветвей с параметрами R_1, L и R_2, C в параллельном контуре (рис. 2.3).

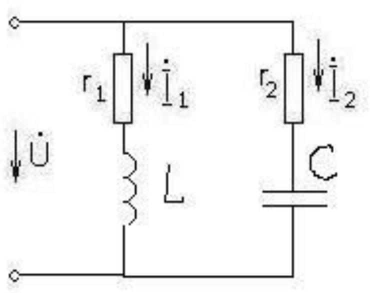


Рис. 2.3 Цепь с параллельным соединением двух ветвей с параметрами R_1, L и R_2, C

Из определения резонанса следует, что угол сдвига фаз равен нулю. Т.к $\varphi = arctg\,\dfrac{b_L - b_C}{g_1 + g_2}$, то при резонансе $B_L = B_C$. Учитывая, что $b_L = \dfrac{X_L}{Z_1^2}; \; b_C = \dfrac{X_C}{Z_2^2};$, следует $\dfrac{X_L}{Z_1^2} = \dfrac{X_C}{Z_2^2}$ или $\dfrac{\omega_0' L}{r_1^2 + (\omega_0' L)^2} = \dfrac{1/\omega_0' C}{r_2^2 + (1/\omega_0' C)^2}$, где ω_0' – частота резонанса тока, откуда после преобразований имеем:

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - r_1^2}{L/C - r_2^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{p^2 - r_1^2}{p^2 - r_2^2}} \qquad (2.8)$$

Из выражения (2.8) следует:

1. Резонансная частота ω_0' при резонансе токов зависит не только от параметров реактивных элементов, но и от активных сопротивлений r_1 и r_2.

2. Резонанс токов возможен, если сопротивления r_1 и r_2 или больше p, или меньше p

3. Если $r_1 = r_2 = p$, резонансная частота $(\omega_0' = \%)$ имеет неопределенное значение, что означает существование резонанса при любой частоте.

4. При r_1 и $r_2 << p$, что справедливо для многих цепей, $\omega_0' \approx 1/\sqrt{LC} = \omega_0$, т.е резонансная частота при резонансе токов равна резонансной частоте при резонансе напряжений.

Рассмотрим характерные особенности контура с малыми потерями при резонансе токов с учетом того, активные сопротивления r_1 и r_2 не изменяются:

1. Т.к $\varphi = 0$ $\cos\varphi = 1$ и общее сопротивление контура активное, то полная проводимость контура равна активной проводимости и практически минимальна:

$$Y = \sqrt{(g_L + g_C)^2 + (b_L + b_C)^2} = g_L + g_C = g_Э \tag{2.9}$$

Сопротивление контура при этом активное и практически максимальное:

$$Z_{экв} = \frac{1}{Y_{экв}} = R_{экв} \tag{2.10}$$

2. Ток в неразветвленной части цепи практически минимален.

$I = Ug_{экв}$, что позволяет обнаружить резонанс токов в контуре при изменении частоты ω, параметров L и C.

3. Активные и реактивные составляющие токов:

$$I_{1a} = g_1 U;\ I_{21a} = g_2 U;\ I_{1p} = b_L U;\ I_{2p} = b_C U;\ I_a = I_{1a} + I_{2a} \tag{2.11}$$

Т.к $b_L = b_C$, то $\overset{*}{I}_p = \overset{*}{I}_{1p} + \overset{*}{I}_{2p} = 0$.

Векторная диаграмма цепи при резонансе токов строится как для любой параллельной цепи, но с учетом $\varphi = 0;\ I_{1p} = I_{2p};\ I = I_a$.

Ток в общей части цепи равен активной составляющей тока

$$I = \sqrt{I_a^2 + (I_{1p} - I_{2p})^2} = I_a \tag{2.12}$$

Ток в ветвях

$$I_1 = \sqrt{g_1^2 + b_L^2}U \tag{2.13}$$

$$I_2 = \sqrt{g_2^2 + b_C^2}U \tag{2.14}$$

Если $b_L >> g_1$, $b_C >> g_2$, т.е $X_L >> r_1$, $X_C >> r_2$, то $I_{1p} >> I_{1a}$, $I_{2p} >> I_{2a}$, $I_1 >> I$, $I_2 >> I$, , т.е токи в ветвях значительно больше, чем ток в неразветвленной части цепи. Это свойство – усиление тока широко используется, и дало название этому явлению.

4. Коэффициент усиления по току при $r_1 = r_2 = r << X_L = X_C$,

$$\frac{I_1}{I} = \frac{I_2}{I} = \frac{b_L U}{g_{экв} U} = \frac{X_L / (r_1^2 + X_L^2)}{r_1 / (r_1^2 + X_L^2) + r_2 / (r_2^2 + X_C^2)} \approx \frac{1/X_L}{r_1 / X_L^2 + r_2 / X_C^2} = \frac{X_L}{r_1 + r_2} = \frac{\rho}{r} = Q$$

,

(2.15)

т.е равен добротности контура.

5. Реактивные мощности

$$Q_L = Q_C, \text{ т.к } Q_L = b_L U^2; \; Q_C = b_C U^2; \tag{2.16}$$

Это означает, что, как и при резонансе напряжений, между катушкой и конденсатором происходит обмен энергией, но источник при этом обмене не участвует: источник только восполняет потери в активных сопротивлениях контура.

Пример. *Для реактивного двухполюсника, схема которого приведена на рис. 2.4, требуется определить значения резонансных частот и построить график зависимости* $x_{вх}(\omega)$. *Параметры элементов схемы имеют следующие значения:*

L_1 *= 10 мГн;* L_2 *= 20 мГн;* C_1 *= 4 мкФ;* C_2 *= 1 мкФ.*

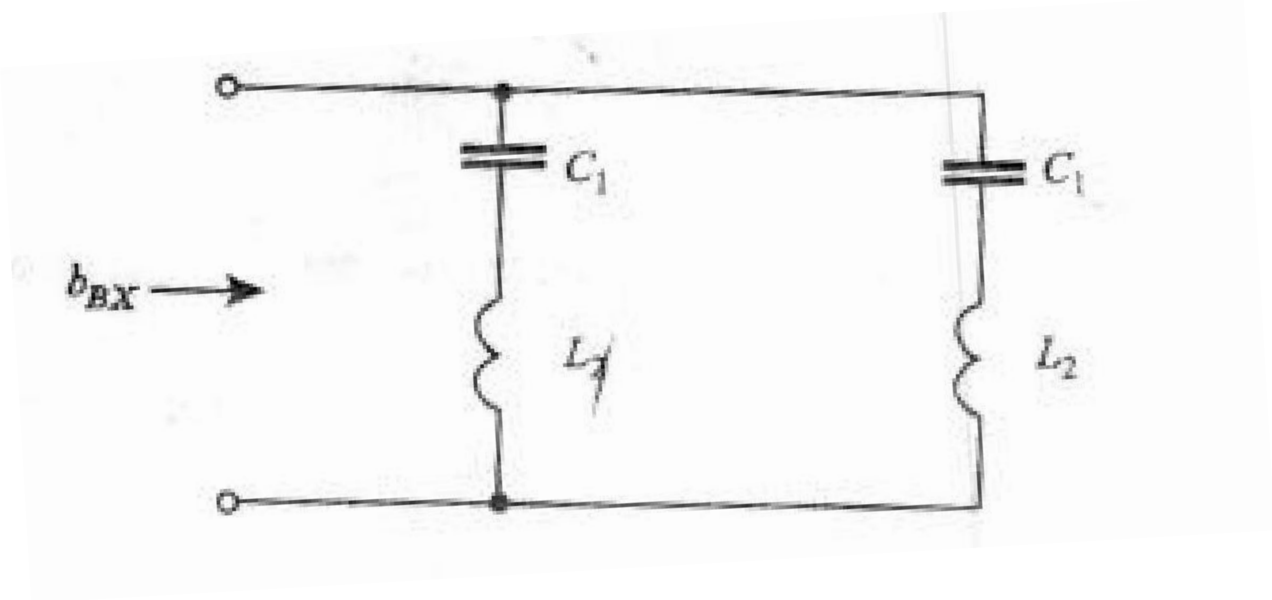


Рис. 2.4 Схема цепи к примеру

Решение. Найдем реактивную входную проводимость двухполюсника:

$$b_{\text{ВХ}} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$$

где $x_1 = x_{L1} - x_{C1} = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$ — реактивное сопротивление первой ветви;
$x_2 = x_{L2} - x_{C2} = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$ реактивное сопротивление второй ветви.

Подставив значения сопротивлений ветвей, найдем реактивную проводимость двухполюсника

$$b_{\text{ВХ}} = \frac{\omega C_1}{1-\omega^2 L_1 C_1} + \frac{\omega C_2}{1-\omega^2 L_2 C_2};$$

отсюда находим:

$$b_{\text{ВХ}} = \frac{\omega[(C_1+C_2)-C_1C_2(L_1+L_2)\omega^2]}{(1-\omega^2 L_1 C_1)(1-\omega^2 L_2 C_2)}.$$

Приравняв к нулю знаменатель этого выражения, найдем частоты резонансов напряжений

$$\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1 C_1};\ \omega_{02} = 1/\sqrt{L_2 C_2}.$$

Подставив значения параметров элементов, найдем частоты резонансов напряжений:

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2}\cdot 4\cdot 10^{-6}}} = \frac{10^4}{2} = 5000c^{-1};$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-6}}} = \frac{10^4}{\sqrt{2}} = 7000c^{-1}.$$

На этих частотах входная проводимость обращается в бесконечность (а соответственно, входное сопротивление обращается в нуль).

Приравняв к нулю числитель входной проводимости, найдем частоту резонанса токов

$$\omega_{03} = \sqrt{(C_1 + C_2)/C_1 C_2 (L_1 + L_2)} = 10^4 \sqrt{5/12} = 6455c^{-1}.$$

На этой частоте входная проводимость обращается в нуль, поэтому ток в цепи отсутствует.

Выполненный расчет показывает, что частота резонанса токов расположена между частотами резонансов напряжений.

График частотной характеристики входной проводимости начинается с нулевого значения $b_{вх}(0) = 0$. Затем проводимость возрастает и на частоте ω_{01} первого резонанса напряжений обращается в бесконечность. После этого входная проводимость изменяет знак и на частоте ω_{03} обращается в нуль, что соответствует резонансу токов. Затем проводимость вновь возрастает и на частоте ω_{02} снова обращается в бесконечность. При дальнейшем повышении частоты проводимость изменяет знак и асимптотически стремится к нулевому значению.